

ΛΥΣΗ

α) Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-2, 0)$ και $E(2, 0)$,

$$\text{άρα } 2\gamma = (E'E) = 4 \text{ ή } \gamma = 2.$$

Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι $(A'A) = 8$,

$$\text{άρα } 2\alpha = (A'A) = 8 \text{ ή } \alpha = 4.$$

$$\text{Επομένως } \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 4^2 - 2^2 = 12.$$

Επειδή οι εστίες βρίσκονται στον άξονα $x'x$, η έλλειψη έχει εξίσωση της μορφής

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ οπότε με αντικατάσταση προκύπτει } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

β) i) Από την εξίσωση της έλλειψης $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$, για $x = x_E = 2$ βρίσκουμε:

$$\frac{2^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$$

$$3 + y^2 = 12$$

$$y^2 = 9$$

$$y = 3 \text{ ή } y = -3$$

Επειδή το Σ έχει θετική τεταγμένη και το P αρνητική, θα είναι $\Sigma(2, 3)$ και $P(2, -3)$.

$$\text{ii) Είναι } (\Sigma P) = |y_P - y_\Sigma| = |-3 - 3| = |-6| = 6.$$