

## ΛΥΣΗ

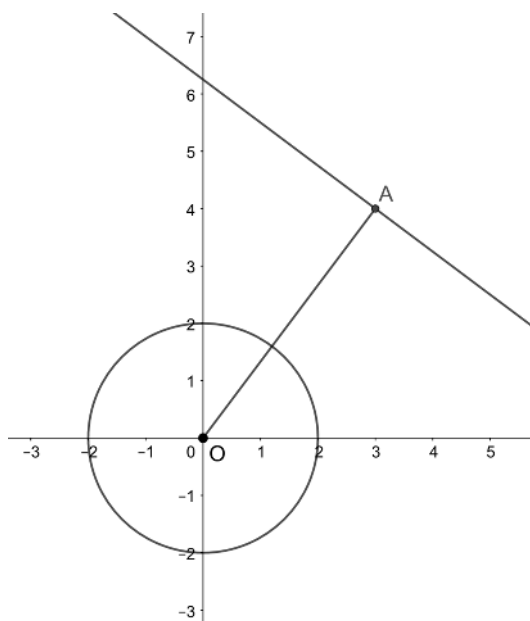
α)

- i. Ο κύκλος έχει κέντρο το  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho = 2$ . Η εξίσωση κύκλου με κέντρο το  $O(0,0)$  είναι της μορφής  $x^2 + y^2 = \rho^2$ . Επομένως η εξίσωση γίνεται  $x^2 + y^2 = 4$ .
- ii. Για να διέρχεται ο αγωγός από το κέντρο  $O$  θα πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωση  $3x+4y = 25$ , δηλαδή  $3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$ , που δεν είναι ίσο με 25. Επομένως, ο αγωγός δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού.
- iii. Για να έχουμε την ελάχιστη δυνατή απόσταση θα πρέπει να φέρουμε την κάθετη  $OA$  από το κέντρο  $O$  προς την ευθεία του αγωγού. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας του αγωγού είναι  $\lambda_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{4}$ . Για να είναι η  $AO$  κάθετη στον αγωγό πρέπει  $\lambda_1 \lambda_{AO} = -1$  ή  $-\frac{3}{4} \lambda_{AO} = -1$  ή  $\lambda_{AO} = \frac{4}{3}$ . Η εξίσωση της  $AO$  θα είναι:  
 $y - y_0 = \lambda_{AO}(x - x_0)$  ή  $y - 0 = \frac{4}{3}(x - 0)$  ή  $y = \frac{4}{3}x$ . Το σημείο  $A$  είναι το σημείο τομής της  $AO$  και της ευθείας του αγωγού. Για να βρεθεί λύνουμε το σύστημά τους.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 25 & (1) \\ y = \frac{4}{3}x & (2) \end{cases}$$

Η (1) γίνεται  $3x + 4 \cdot \frac{4}{3}x = 25$  ή  $9x + 16x = 75$  ή  $25x = 75$ , δηλαδή  $x = 3$ . Η (2) γίνεται

$y = \frac{4}{3} \cdot 3 = 4$ . Επομένως το σημείο  $A$  είναι το  $(3,4)$ .



β) Για να εφάπτεται ο δρόμος του κυκλικού σιντριβανιού πρέπει η απόσταση του κέντρου Ο από την ευθεία του δρόμου να ισούται με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή  $d(O, \epsilon) = \rho$ .

$$d(O, \rho) = \frac{|Ax_o + By_o + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|\lambda \cdot 0 + 0 + \lambda - 2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2 \quad \text{ή} \quad \frac{|\lambda - 2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2 \quad \text{ή} \quad |\lambda - 2| = 2\sqrt{\lambda^2 + 1}$$

$$|\lambda - 2|^2 = \left(2\sqrt{\lambda^2 + 1}\right)^2 \quad \text{ή} \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 4(\lambda^2 + 1) \quad \text{ή} \quad 3\lambda^2 + 4\lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda(3\lambda + 4) = 0.$$

Έχουμε  $\lambda = 0$  που απορρίπτεται λόγω της υπόθεσης ( $\lambda \neq 0$ ) ή  $\lambda = -\frac{4}{3}$ .