

ΘΕΜΑ 4

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $M(x,y)$, $A(-1,0)$, $B(1,0)$ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = 9|\overrightarrow{AB}|$.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι ο κύκλος με εξίσωση

$$x^2 + y^2 = 8. \quad (\text{Μονάδες } 10)$$

β) Έστω Γ και Δ δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε $\Gamma\Delta^2 = 32$.

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Γ και Δ και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία.

(Μονάδες 08)

ii. Αν το σημείο M κινείται στον κύκλο, να υπολογίσετε το $\overrightarrow{M\Gamma} \cdot \overrightarrow{M\Delta}$ (Μονάδες 07)