

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} = 1$$

Επομένως, είναι $\alpha^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha = 5$, $\beta^2 = 25 \Leftrightarrow \beta = 5$ και $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 25 + 25 = 50$.

Άρα, $\gamma = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E(\gamma, 0)$, $E'(-\gamma, 0)$, δηλαδή:

$$E(5\sqrt{2}, 0), E'(-5\sqrt{2}, 0)$$

β) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

είναι οι ευθείες

$$(\varepsilon_1): y = \frac{\beta}{\alpha}x \text{ και } (\varepsilon_2): y = -\frac{\beta}{\alpha}x$$

δηλαδή

$$(\varepsilon_1): y = x \text{ και } (\varepsilon_2): y = -x$$

γ) Οι ευθείες (ε_1) , (ε_2) έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$ αντίστοιχα. Αφού $\lambda_1\lambda_2 = -1$, συμπεραίνουμε ότι οι ασύμπτωτες (ε_1) , (ε_2) είναι κάθετες. Η καμπύλη της υπερβολής, οι εστίες E , E' της και οι ασύμπτωτες απεικονίζονται στο ακόλουθο σχήμα:

