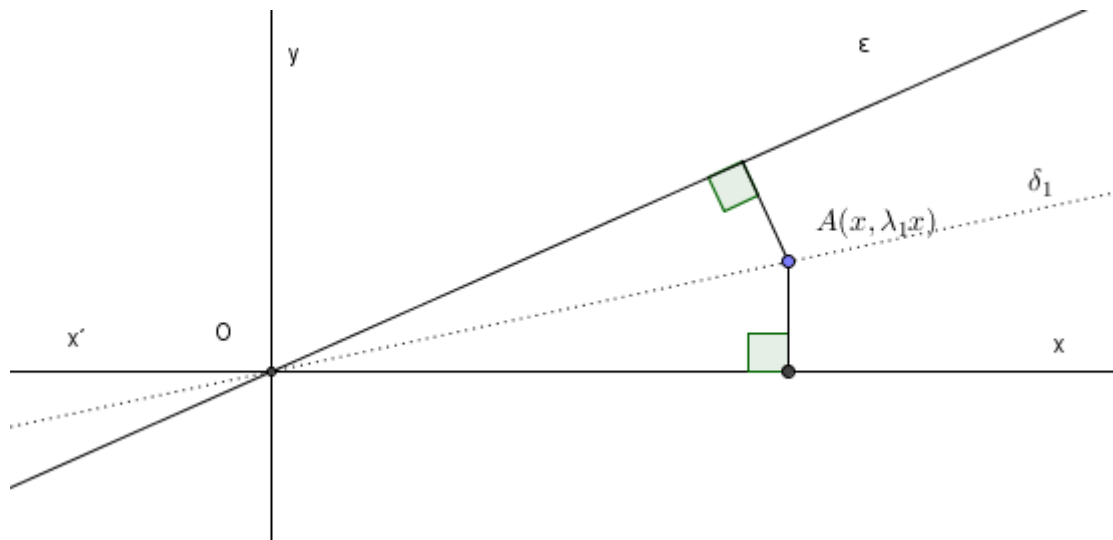


ΛΥΣΗ



α) Εξ ορισμού της διχοτόμου γωνίας, η διχοτόμος διέρχεται από το σημείο τομής των δύο πλευρών της γωνίας. Εδώ, οι δύο πλευρές έχουν εξισώσεις: $y = 0$ και $y = \lambda x$ οι οποίες έχουν μοναδική κοινή λύση το $(x, y) = (0, 0)$, αφού $\lambda \neq 0$. Επίσης, όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα, η διχοτόμος δ_1 έχει κλίση θετική και μικρότερη από την κλίση της ευθείας ε . Συνεπώς, η διχοτόμος δ_1 είναι μη κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και άρα έχει εξίσωση της μορφής:

$$y = \lambda_1 x \quad \text{με } 0 < \lambda_1 < \lambda.$$

Ένα τυχαίο σημείο της διχοτόμου δ_1 έχει συντεταγμένες $(x, \lambda_1 x)$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Επιλέγω το σημείο $A(1, \lambda_1)$, που αντιστοιχεί στο $x = 1$. Επίσης, οι εξισώσεις των πλευρών της γωνίας είναι:

$$x'x \text{ άξονας: } 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 = 0.$$

$$\text{ευθεία } \varepsilon: \lambda \cdot x - 1 \cdot y + 0 = 0.$$

Όμως στο σημείο A,, ως σημείο της διχοτόμου, όσο απέχει από τον $x'x$ άξονα απέχει και από την ευθεία ε , δηλαδή:

$$d(A, x'x \text{ άξονας}) = d(A, \varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$\frac{|0 \cdot 1 + 1 \cdot \lambda_1 + 0|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|\lambda \cdot 1 - 1 \cdot \lambda_1 + 0|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} \xLeftrightarrow{\lambda_1 > 0, \lambda > \lambda_1}$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda - \lambda_1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \Leftrightarrow$$

$$(1 + \sqrt{1 + \lambda^2}) \lambda_1 = \lambda$$

$$\text{Άρα, } \lambda_1 = \frac{\lambda}{1 + \sqrt{1 + \lambda^2}}.$$

β) Η διχοτόμος δ_2 (που βρίσκεται στο 2° και 4° τεταρτημόριο) είναι και αυτή ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, οπότε έχει εξίσωση της μορφής $y = \lambda_2 x$, και είναι κάθετη στη διχοτόμο δ_1 , επομένως το γινόμενο των αντίστοιχων κλίσεων είναι ίσο με -1, δηλαδή $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$, οπότε, από το α ερώτημα, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{-1}{\lambda_1} = \frac{-1}{\frac{\lambda}{1 + \sqrt{1 + \lambda^2}}} = \frac{1 + \sqrt{1 + \lambda^2}}{-\lambda} = \frac{(1 + \sqrt{1 + \lambda^2}) \cdot (1 - \sqrt{1 + \lambda^2})}{(-\lambda) \cdot (1 - \sqrt{1 + \lambda^2})} = \\ &= \frac{1 - (1 + \lambda^2)}{(-\lambda) \cdot (1 - \sqrt{1 + \lambda^2})} = \frac{-\lambda^2}{(-\lambda) \cdot (1 - \sqrt{1 + \lambda^2})} = \frac{\lambda}{1 - \sqrt{1 + \lambda^2}} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα, } \lambda_2 = \frac{\lambda}{1 - \sqrt{1 + \lambda^2}}.$$

γ) Έστω $\lambda = 1$. Τότε η ευθεία $\varepsilon: y = x$ σχηματίζει γωνία 45° με τον θετικό ημιάξονα Ox , και επομένως, η διχοτόμος δ_1 σχηματίζει γωνία $22,5^\circ$ με τον θετικό ημιάξονα Ox . Άρα, από τον ορισμό της κλίσης και το α) ερώτημα, έχουμε διαδοχικά:

$$\varepsilon_{\varphi 22,5^\circ} = \lambda_1 = \frac{\lambda}{1 + \sqrt{1 + \lambda^2}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + 1^2}} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{(1 + \sqrt{2}) \cdot (1 - \sqrt{2})} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = \sqrt{2} - 1.$$