

ΛΥΣΗ

α) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα, αφού $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0$.

β) Το διάνυσμα $\vec{\nu} = (8, -21)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αν και μόνον αν υπάρχουν αριθμοί λ, μ ώστε $\vec{\nu} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ ή ισοδύναμα,

$$(8, -21) = \lambda(-2, 5) + \mu(1, -3), \text{ δηλαδή}$$

$$\begin{cases} 8 = -2\lambda + \mu \\ -21 = 5\lambda - 3\mu \end{cases}$$

το οποίο είναι 2x2 γραμμικό σύστημα με αγνώστους τα λ, μ .

Το σύστημα, με την μέθοδο των οριζουσών, έχει μοναδική λύση:

$$\lambda = \frac{D_\lambda}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ -21 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{1} = -3 \text{ και}$$

$$\mu = \frac{D_\mu}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 5 & -21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Άρα,

$$(8, -21) = -3(-2, 5) + 2(1, -3).$$