

## ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της παραβολής με την ευθεία, αν υπάρχουν, προσδιορίζονται από τη λύση του αντίστοιχου συστήματος. Είναι:

$$\begin{cases} y^2 = 3x \\ 3x + 4y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{10+4y}{3} \\ y^2 = -10-4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{10+4y}{3} \\ y^2 + 4y + 10 = 0 \end{cases}$$

Η εξίσωση  $y^2 + 4y + 10 = 0$  έχει διακρίνουσα  $\Delta = -24 < 0$ , οπότε είναι αδύνατη. Άρα η παραβολή και η ευθεία δεν έχουν κοινά σημεία. Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται η συγκεκριμένη κατάσταση.

β) Αν  $M(x_o, y_o)$  είναι ένα σημείο της παραβολής

$C: y^2 = 3x$ , τότε ισχύει  $y_o^2 = 3x_o$ , οπότε

$M\left(\frac{y_o^2}{3}, y_o\right)$ . Η απόσταση του  $M$  από την ευθεία

( $\epsilon$ ) είναι:

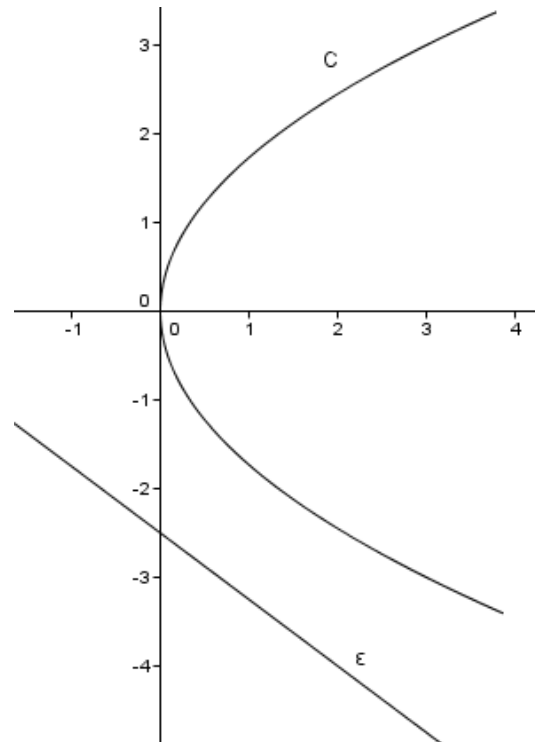
$$\begin{aligned} d(M, \epsilon) &= \frac{\left| 3 \frac{y_o^2}{3} + 4y_o + 10 \right|}{\sqrt{9+16}} \\ &= \frac{|y_o^2 + 4y_o + 10|}{5} = \frac{(y_o + 2)^2 + 6}{5} \end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο.

γ) Είναι φανερό ότι  $d(M, \epsilon) \geq \frac{6}{5}$ , με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν  $y_o = -2$ . Έτσι, το πλησιέστερο στην ευθεία σημείο της παραβολής έχει τεταγμένη  $y_o = -2$ , οπότε

$$3x_o = y_o^2 \Leftrightarrow 3x_o = 4 \Leftrightarrow x_o = \frac{4}{3}$$

Επομένως, το πλησιέστερο στην ευθεία σημείο της παραβολής είναι το  $M\left(\frac{4}{3}, -2\right)$ .



δ) Η παραβολή έχει παράμετρο  $p = \frac{3}{2}$ , οπότε η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Μ έχει εξίσωση

$$-2y = \frac{3}{2}\left(x + \frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow -2y = \frac{3}{2}x + 2 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x - 1$$

Ο συντελεστής της εφαπτομένης είναι  $\lambda = -\frac{3}{4}$  και της δοσμένης εξίσωσης (ε) είναι  $\lambda_{\varepsilon} = -\frac{3}{4}$ , οπότε η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην (ε).