

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση $\lambda x + y = 2\lambda$ είναι της μορφής $Ax + By = \Gamma$ με $B=1 \neq 0$ οπότε παριστάνει ευθεία ε_λ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Ομοίως η εξίσωση $x + \lambda y = \lambda + 1$ είναι της μορφής $Ax + By = \Gamma$ με $A=1 \neq 0$ οπότε παριστάνει ευθεία η_λ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Οι ευθείες ε_λ και η_λ τέμνονται αν και μόνο αν το σύστημά τους έχει μοναδική λύση. Το

σύστημά τους $\begin{cases} \lambda x + y = 2\lambda \\ x + \lambda y = \lambda + 1 \end{cases}$ είναι γραμμικό με ορίζουσα

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1).$$

Για να έχει μοναδική λύση πρέπει και αρκεί $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \neq 1 \Leftrightarrow \lambda \neq \pm 1$.

γ) Για $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

i. Το σημείο τομής M των ε_λ και η_λ προσδιορίζεται από τη λύση του συστήματος

$\begin{cases} \lambda x + y = 2\lambda \\ x + \lambda y = \lambda + 1 \end{cases}$ και είναι το σημείο με συντεταγμένες $(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D})$, όπου

$$D_x = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ \lambda + 1 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 2(\lambda - 1)(\lambda + \frac{1}{2}) \text{ και}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda \\ 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2\lambda = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1).$$

$$\text{Είναι } \frac{D_x}{D} = \frac{2(\lambda - 1)(\lambda + \frac{1}{2})}{(\lambda + 1)(\lambda - 1)} = \frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1} \text{ και } \frac{D_y}{D} = \frac{\lambda(\lambda - 1)}{(\lambda + 1)(\lambda - 1)} = \frac{\lambda}{\lambda + 1}$$

$$\text{Συνεπώς } M\left(\frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda}{\lambda + 1}\right) \text{ με } \lambda \neq \pm 1.$$

ii. Το M κινείται στην ευθεία $\zeta: x - y = 1$ αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ζ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$$\text{Πράγματι } \frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1} - \frac{\lambda}{\lambda + 1} = 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda + 1}{\lambda + 1} = 1 \text{ που ισχύει.}$$