

ΛΥΣΗ

α) Για την παραβολή $x^2 = 12y$ ή $x^2 = 2 \cdot 6y$ το $p = 6$, άρα η εστία της είναι το $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ ή $E(0, 3)$.

Το σημείο $(x_0, 3)$ ανήκει στην παραβολή, άρα:

$$x_0^2 = 12 \cdot 3 \text{ ή } x_0^2 = 36 \text{ ή } (x_0 = 6 \text{ ή } x_0 = -6)$$

Επομένως $A(6, 3)$ και $B(-6, 3)$ είναι τα ζητούμενα σημεία.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της (x_1, y_1) έχει εξίσωση:

$$xx_1 = p(y + y_1)$$

Για την (ϵ_1) με σημείο επαφής το $A(6, 3)$ αντικαθιστούμε ως x_1 και y_1 τις συντεταγμένες του σημείου A και $p = 6$:

$$6x = 6(y + 3) \text{ ή } 6x = 6y + 18 \text{ ή } x = y + 3 \text{ ή } y = x - 3$$

Για την (ϵ_2) με σημείο επαφής το $B(-6, 3)$ αντικαθιστούμε ως x_1 και y_1 τις συντεταγμένες του σημείου B και $p = 6$:

$$-6x = 6(y + 3) \text{ ή } -6x = 6y + 18 \text{ ή } -x = y + 3 \text{ ή } y = -x - 3$$

γ) Βρίσκουμε το σημείο τομής των (ϵ_1) : $y = x - 3$ και (ϵ_2) : $y = -x - 3$ λύνοντας το σύστημα των εξισώσεών τους.

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = -x - 3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = x - 3 \\ 2y = -6 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} -3 = x - 3 \\ y = -3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

Άρα το σημείο τομής των (ϵ_1) και (ϵ_2) είναι το σημείο $(0, -3)$.