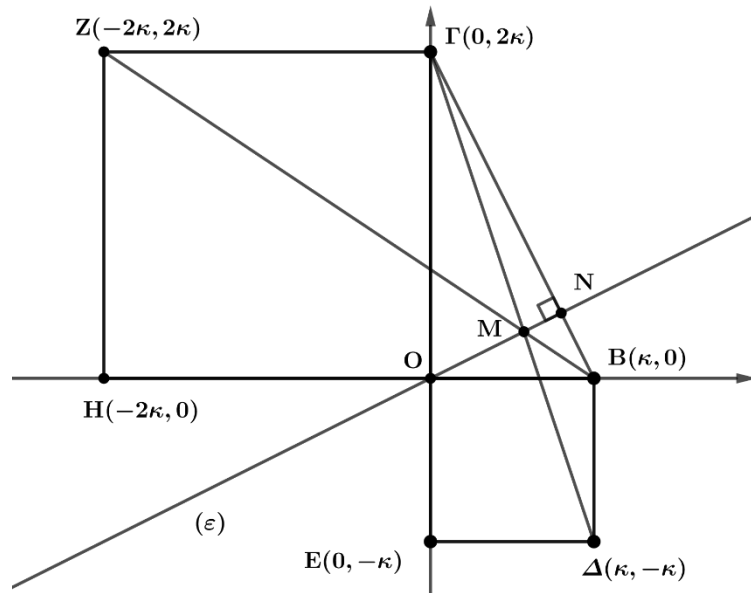


ΛΥΣΗ

α) Επειδή τα τετράπλευρα ΟΒΔΕ και ΟΓΖΗ είναι τετράγωνα, οι συντεταγμένες των κορυφών τους είναι: Δ(κ, -κ), Ε(0, -κ), Ζ(-2κ, 2κ) και Η(-2κ, 0).



Η εξίσωση της ευθείας ΓΔ είναι:

$$\frac{y-2\kappa}{x-0} = \frac{-\kappa-2\kappa}{\kappa-0} \Leftrightarrow \frac{y-2\kappa}{x} = \frac{-3\cancel{\kappa}}{\cancel{\kappa}} \text{ επομένως } y-2\kappa = -3x \Leftrightarrow 3x + y - 2\kappa = 0.$$

Η εξίσωση της ευθείας ΒΖ είναι:

$$\frac{y-2\kappa}{x-(-2\kappa)} = \frac{0-2\kappa}{\kappa-(-2\kappa)} \Leftrightarrow \frac{y-2\kappa}{x+2\kappa} = \frac{-2\cancel{\kappa}}{3\cancel{\kappa}} \text{ επομένως } 3y-6\kappa = -2x-4\kappa \Leftrightarrow 2x+3y-2\kappa = 0.$$

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που ορίζεται από το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ είναι:

$$\lambda_{\text{ΒΓ}} = \frac{2\kappa-0}{0-\kappa} = -2.$$

η ευθεία (ε) που ορίζεται από το ύψος ΑΔ του ορθογώνιου τριγώνου ΟΒΓ, είναι κάθετη της πλευράς ΒΓ, επομένως για τους συντελεστές διεύθυνσης τους ισχύει:

$$\lambda_{\varepsilon} \cdot \lambda_{\text{ΒΓ}} = -1.$$

Επειδή $\lambda_{\text{ΒΓ}} = -2$, έχουμε ότι:

$$\lambda_{\varepsilon} \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = \frac{1}{2}.$$

Η ευθεία (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει μορφή $y = \lambda_{\varepsilon} \cdot x$ δηλαδή $y = \frac{1}{2}x$.

γ) Για να αποδείξουμε ότι οι ευθείες που ορίζονται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ, ΒΖ και η ευθεία (ε) διέρχονται από το ίδιο σημείο, αρκεί να βρούμε σημείο Μ του οποίου οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν όλες τις εξισώσεις των ευθειών. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι η τομή δύο ευθειών από τις τρεις ανήκει στην τρίτη ευθεία.

Οι συντεταγμένες της τομής Μ των ευθειών (ε) και ΓΔ δίνονται από την λύση του συστήματος:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + y - 2\kappa = 0 \\ y = \frac{1}{2}x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x + \frac{1}{2}x - 2\kappa = 0 \\ y = \frac{1}{2}x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{4}{7}\kappa \\ y = \frac{2}{7}\kappa \end{array} \right\} \text{επομένως } M\left(\frac{4}{7}\kappa, \frac{2}{7}\kappa\right).$$

Το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία που ορίζεται από το ευθύγραμμο τμήμα ΒΖ αφού οι συντεταγμένες του Μ την επαληθεύουν, πράγματι

$$2 \cdot \frac{4}{7}\kappa + 3 \cdot \frac{2}{7}\kappa - 2\kappa = \frac{8}{7}\kappa + \frac{6}{7}\kappa - 2\kappa = \frac{14}{7}\kappa - 2\kappa = 2\kappa - 2\kappa = 0.$$

επομένως οι ευθείες που ορίζονται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ, ΒΖ και η ευθεία (ε) διέρχονται από το ίδιο σημείο.