

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 5$, $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$ (1) και $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - \vec{\gamma} = 0$ (2).

Οπότε: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos(\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})})$, από την οποία λόγω των (1) παίρνουμε:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4 \cdot 5 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 20 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -10.$$

β) Έχουμε: $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} \Rightarrow \vec{\gamma}^2 = (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})^2 \Rightarrow$

$$|\vec{\gamma}|^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 12\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2 \Rightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 + 12\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 9|\vec{\beta}|^2,$$

η οποία λόγω της (1) και του ερωτήματος (α) γράφεται:

$$|\vec{\gamma}|^2 = 4 \cdot 4^2 + 12 \cdot (-10) + 9 \cdot 5^2 \Rightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 64 - 120 + 225 \Rightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 169 \Rightarrow |\vec{\gamma}| = 13.$$