

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση του κύκλου είναι  $(c): x^2 + y^2 = 5$ .

Επιπλέον είναι:  $(OA) = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10} > \sqrt{5} = \rho$ .

Ως εκ τούτου, το σημείο  $A$  είναι εξωτερικό του κύκλου.

β)

i. Η εξίσωση εφαπτομένης κύκλου, με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $\rho$ , στο

σημείο  $M(x_1, y_1)$  του κύκλου, είναι η  $xx_1 + yy_1 = \rho^2 \Leftrightarrow xx_1 + yy_1 = 5, (1)$ .

Το σημείο  $A(3,1)$  όμως επαληθεύει την  $(1)$ , δηλαδή  $3x_1 + y_1 = 5$ .

Επιπλέον το σημείο  $M(x_1, y_1)$  ανήκει στον κύκλο, δηλαδή  $x_1^2 + y_1^2 = 5$ .

Η εύρεση των  $x_1, y_1$  και ως εκ τούτου της εφαπτομένης, προκύπτει από την επίλυση του συστήματος:

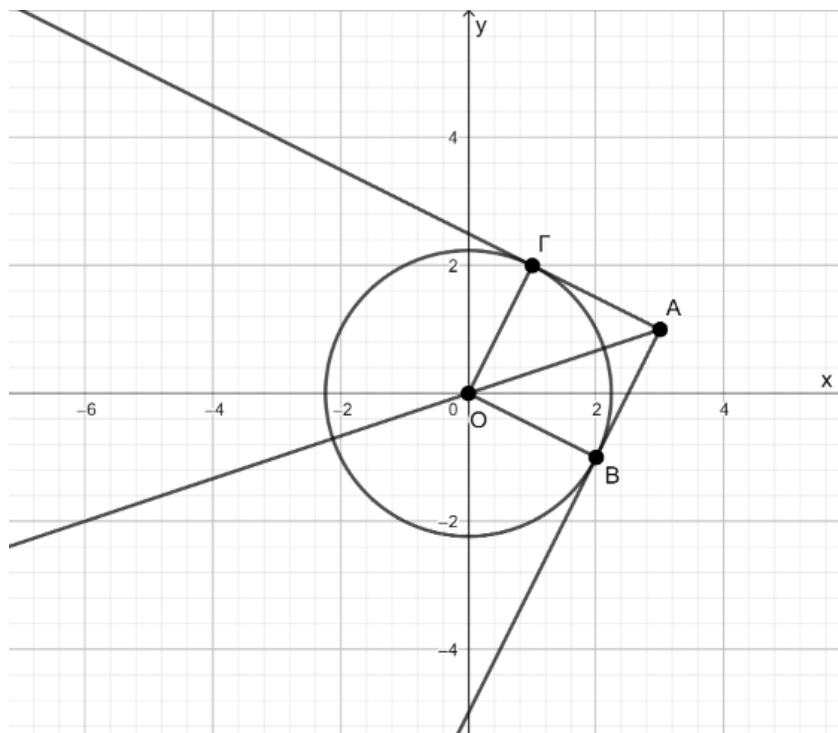
$$\begin{cases} 3x_1 + y_1 = 5 \\ x_1^2 + y_1^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 5 - 3x_1 \\ x_1^2 + (5 - 3x_1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 5 - 3x_1 \\ x_1^2 - 3x_1 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y_1 = -1 \\ x_1 = 2 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y_1 = 2 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Άρα τα σημεία επαφής είναι το  $B(2, -1)$  και το  $\Gamma(1,2)$ .

Επομένως οι εξισώσεις των δύο εφαπτόμενων, είναι αντίστοιχα:

$$(\varepsilon_1): 2x - y = 5 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): x + 2y = 5$$



- ii. Η ζητούμενη διχοτόμος είναι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $O$  και  $A$ , διότι το  $O$  απέχει ίση απόσταση από της πλευρές της γωνίας, αφού  $(OB) = (OG) = \rho$ .

Ο συντελεστής διεύθυνσής της είναι  $\lambda_{OA} = \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$  και ένα σημείο της το  $O(0,0)$ .

Επομένως η εξίσωσή της είναι  $y - 0 = \frac{1}{3}(x - 0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x$ .