

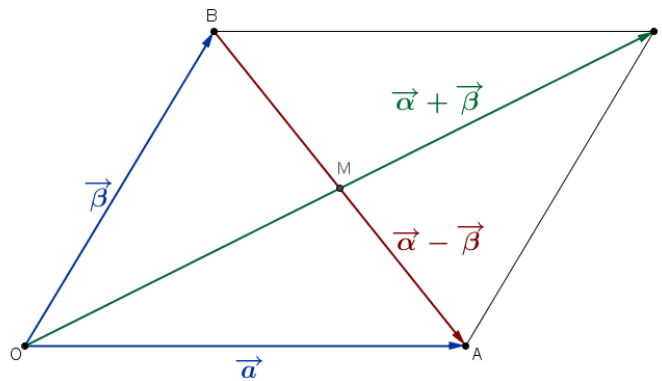
ΛΥΣΗ

α) Ισχύει:

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 + (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 + \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 2\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\beta}^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2.$$

β)

- i. Σε κάθε παραλληλόγραμμο $OAGB$, αν οι δύο πλευρές του συμβολισθούν με $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$, τότε η μία διαγώνιος εκφράζει το άθροισμα τους, δηλαδή $\overrightarrow{OG} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και η άλλη διαγώνιος εκφράζει τη διαφορά τους, δηλαδή $\overrightarrow{BA} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.



- ii. Επομένως, σε κάθε παραλληλόγραμμο $OAGB$ ισχύει:

$$(OG)^2 + (AB)^2 = 2(OA)^2 + 2(OB)^2 \text{ ή}$$

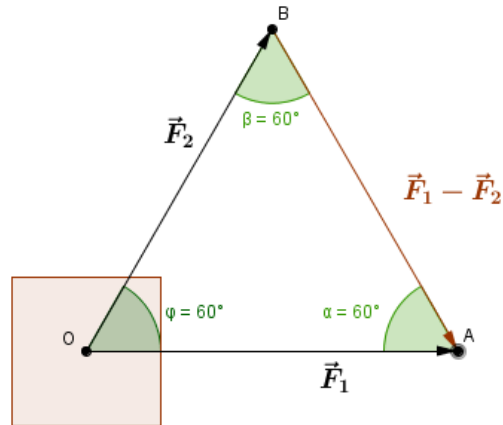
$$(OG)^2 + (AB)^2 = 2[(OA)^2 + (OB)^2]$$

Δηλαδή, το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ισούται με το διπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων δύο διαδοχικών πλευρών του.

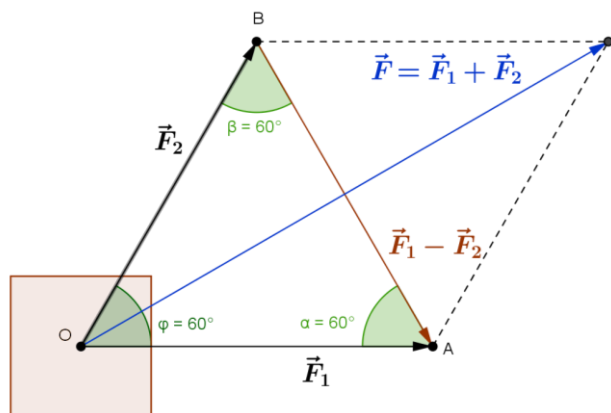
- γ) Η συνισταμένη των δύο δυνάμεων είναι το διανυσματικό τους άθροισμα, δηλαδή

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Είναι $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 10 \text{ N}$. Επομένως $(OA) = (OB) = 10$.



Αφού η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων \vec{F}_1 και \vec{F}_2 είναι 60° , το τρίγωνο OAB που σχηματίζεται είναι ισόπλευρο με πλευρά 10 και $(AB) = |\vec{F}_1 - \vec{F}_2| = 10$. Σχεδιάζοντας το παραλληλόγραμμο με πλευρές τα δύο διανύσματα, προκύπτει το παρακάτω σχήμα.



Από τη σχέση (1) λοιπόν είναι:

$$|\vec{F}_1 + \vec{F}_2|^2 + |\vec{F}_1 - \vec{F}_2|^2 = 2|\vec{F}_1|^2 + 2|\vec{F}_2|^2 \Leftrightarrow |\vec{F}|^2 = 2|\vec{F}_1|^2 + 2|\vec{F}_2|^2 - |\vec{F}_1 - \vec{F}_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$|\vec{F}|^2 = 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^2 - 10^2 \Leftrightarrow |\vec{F}|^2 = 3 \cdot 10^2 \Leftrightarrow |\vec{F}| = 10\sqrt{3}$$

Επομένως, η συνισταμένη \vec{F} των δύο δυνάμεων έχει μέτρο $|\vec{F}| = 10\sqrt{3} \text{ N}$ και την κατεύθυνση της διαγωνίου OG , όπως φαίνεται στο ανωτέρω σχήμα.