

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον τα σημεία της ευθείας ε πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή ισαπέχουν από τα Α, Β, αυτή θα είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Αν Μ το μέσο του ΑΒ τότε:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+7}{2} = 5, y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 2, \text{ άρα } M(5, 2).$$

$$\text{Επίσης } \lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-6}{7-3} = -2,$$

$$\text{οπότε: } \varepsilon \perp AB \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \frac{-1}{\lambda_{AB}} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{άρα } \varepsilon: y - y_M = \lambda_{AB}(x - x_M) \text{ ή } \varepsilon: y - 2 = \frac{1}{2}(x - 5) \text{ ή } \varepsilon: 2y - 4 = x - 5 \text{ ή } \varepsilon: x - 2y - 1 = 0,$$

η ζητούμενη εξίσωση.

β) Θέλουμε $(\Sigma AB) = 20$ τ.μ. (1)

Αν $\Sigma(x, y)$, τότε το $\Sigma \in \varepsilon \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2y + 1$ (2), οπότε $\Sigma(2y + 1, y)$.

Ακόμη $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (7-3, -2-6) = (4, -8)$ και

$\overrightarrow{AS} = (x_\Sigma - x_A, y_\Sigma - y_A) = (2y + 1 - 3, y - 6) = (2y - 2, y - 6)$, οπότε από την (1) είναι:

$$\frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS})| = 20 \Leftrightarrow \left| \begin{vmatrix} x_{AB} & y_{AB} \\ x_{AS} & y_{AS} \end{vmatrix} \right| = 40 \Leftrightarrow \left| \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 2y-2 & y-6 \end{vmatrix} \right| = 40 \Leftrightarrow$$

$$|4(y-6) - (-8)(2y-2)| = 40 \Leftrightarrow |4y - 24 + 16y - 16| = 40 \Leftrightarrow |20y - 40| = 40 \Leftrightarrow$$

$$20|y - 2| = 40 \Leftrightarrow |y - 2| = 2 \Leftrightarrow y - 2 = -2 \text{ ή } y - 2 = 2 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = 4.$$

Για $y = 0$ από την (2) παίρνουμε: $x = 1$. Για $y = 4$ από την (2) παίρνουμε: $x = 9$.

Άρα $\Sigma(1, 0)$ ή $\Sigma(9, 4)$.