

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση  $(x - 2)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2 + 1$  (1), όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του  $\lambda$  η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 03)

β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του  $\lambda$  διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

(Μονάδες 10)

γ) Αν  $A(1,0)$  και  $B(3,0)$  είναι τα μοναδικά σημεία από τα οποία διέρχονται όλοι οι κύκλοι, τότε να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους και να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων.

(Μονάδες 07)

δ) Αν ένα σημείο  $M(\alpha, \beta)$  επαληθεύει την (1) για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , τότε να αποδείξετε ότι  $\alpha \cdot \beta = 0$ .

(Μονάδες 05)