

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε

$$(AB) = d(A, \varepsilon) \Leftrightarrow \sqrt{(-2-1)^2 + (2-3)^2} = \frac{|3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + \alpha|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} \Leftrightarrow \sqrt{10} = \frac{|6 + \alpha|}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |\alpha + 6| = 10 \Leftrightarrow \alpha + 6 = 10 \text{ ή } \alpha + 6 = -10 \text{ τότε } \alpha = 4 \text{ ή } \alpha = -16.$$

β) Για $\alpha = 4$ έχουμε $\varepsilon: 3x + y + 4 = 0$.

i. Η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Γ , άρα για $x = 0$ το $y = -4$.

Επομένως, η συντεταγμένες του Γ είναι $(0, -4)$.

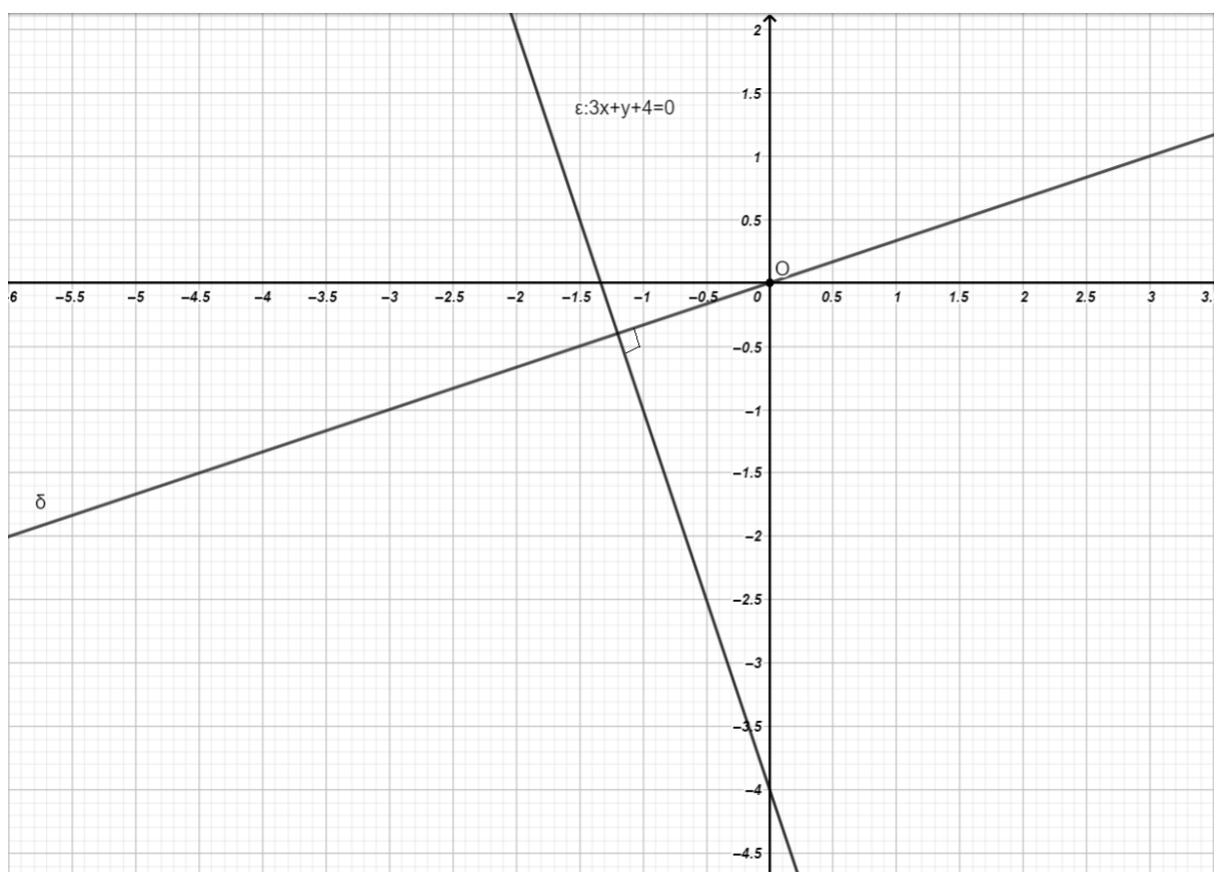
Βρίσκουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

$$\overrightarrow{AB} = (-3, -1) \text{ και } \overrightarrow{A\Gamma} = (-1, -7).$$

Από το τύπο του εμβαδού τριγώνου $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})|$ υπολογίζουμε ότι

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10 \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

ii.



Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα αξόνων την ευθεία ε και το σημείο που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων, είναι το σημείο τομής της ευθείας ε με την ευθεία δ που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το O .

Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο σημείο αρκεί να βρούμε την εξίσωση της ευθείας δ και να λύσουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων.

Επειδή, $\lambda_\epsilon = -3$ και $\lambda_\epsilon \cdot \lambda_\delta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta = \frac{1}{3}$. Η ευθεία δ διέρχεται από το $(0,0)$ τότε $\delta: y = \frac{1}{3}x$.

Από τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 3x + y + 4 = 0 \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases}.$$

Βρίσκουμε το κοινό σημείο $\left(-\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}\right)$, που είναι το ζητούμενο.