

## ΛΥΣΗ

α) i. Αφού η ευθεία διέρχεται από το Μ και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$ , η εξίσωση της είναι  $y-1=\lambda(x-2)$  που γράφεται  $y=\lambda x-2\lambda+1$ .

ii. Σε κάθε περίπτωση που ισχύει  $\lambda \neq 0$  η ευθεία τέμνει και τους δυο άξονες και όταν δεν διέρχεται από την αρχή Ο, δηλαδή όταν  $\lambda \neq \frac{1}{2}$ , σχηματίζει τρίγωνο.

Επομένως, η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες μόνο όταν  $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ .

β) i. Με  $y=0$  στην εξίσωση της ευθείας, παίρνουμε  $x=\frac{2\lambda-1}{\lambda}$ , οπότε  $A\left(\frac{2\lambda-1}{\lambda}, 0\right)$ , ενώ με  $x=0$  παίρνουμε  $y=-2\lambda+1$ , οπότε  $B(0, -2\lambda+1)$ . Επομένως τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ είναι:

$$(OA) = \frac{|2\lambda-1|}{|\lambda|} \text{ και } (OB) = |-2\lambda+1| = |2\lambda-1|$$

ii. Η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο, μόνο όταν  $(OA) = (OB)$ . Είναι:

$$(OA) = (OB) \Leftrightarrow \frac{|2\lambda-1|}{|\lambda|} = |2\lambda-1| \Leftrightarrow |2\lambda-1|(|\lambda|-1) = 0 \Leftrightarrow |\lambda|-1 = 0$$

αφού  $\lambda \neq \frac{1}{2}$ . Άρα η ευθεία σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο, όταν  $\lambda = -1$  ή  $\lambda = 1$ .

iii. Αν  $\lambda = -1$ , τότε  $(OA) = 3$  και  $(OB) = 3$ , οπότε το εμβαδόν  $(OAB)$  του τριγώνου ΟΑΒ είναι

$$(OAB) = \frac{9}{2}$$

Αν  $\lambda = 1$ , τότε  $(OA) = 1$  και  $(OB) = 1$ , οπότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι  $(OAB) = \frac{1}{2}$

## Σχόλιο

Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (υποτείνουσα) με τον άξονα  $x'x$  είναι  $45^\circ$  ή  $135^\circ$ . Έτσι, έχουμε  $\lambda = \tan 45^\circ = 1$  ή  $\lambda = \tan 135^\circ = -1$  που είναι οι τιμές που βρήκαμε παραπάνω.