

Λύση

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε_1 είναι

$$\lambda_1 = \frac{5-2}{8-4} = \frac{3}{4}.$$

Άρα, η ε_1 έχει εξίσωση:

$$\varepsilon_1: y - 2 = \frac{3}{4}(x - 4) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_1: 4y - 8 = 3x - 12 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_1: 3x - 4y - 4 = 0.$$

β) Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-4, -3)$ και $\vec{\beta} = (-1, -7)$ είναι παράλληλα στις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα. Άρα, η οξεία γωνία $\hat{\varphi}$ των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι ίση ή παραπληρωματική της γωνίας $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$. Έχουμε ότι:

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\vec{\beta}| = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

και

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = (-4)(-1) + (-3)(-7) = 25.$$

Οπότε,

$$\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{25}{5 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ.$$

Άρα $\hat{\varphi} = (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 45^\circ$.

γ) Για να βρούμε το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 , λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 3x - 4y - 4 = 0 \\ 7x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4(7x - 1) - 4 = 0 \\ y = 7x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -25x = 0 \\ 7x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Άρα, το σημείο τομής είναι το $(0, -1)$.

δ) Για να είναι η ε_2 διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι ε_1 και ε_3 , πρέπει για τη γωνία θ που σχηματίζουν οι ε_1 και ε_3 να ισχύει $\hat{\theta} = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$, δηλαδή πρέπει $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_3$. Άρα, αν λ_1 και λ_3 οι συντελεστές διεύθυνσης των ε_1 και ε_3 , ισχύει $\lambda_1 \cdot \lambda_3 = -1$.

Είναι $\lambda_1 = \frac{3}{4}$, οπότε:

$$\frac{3}{4}\lambda_3 = -1 \Leftrightarrow \lambda_3 = -\frac{4}{3}.$$

Επίσης, η ευθεία ε_3 πρέπει να διέρχεται από το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 , το οποίο από το ερώτημα γ) είναι το $(0, -1)$.

Άρα, η ε_3 έχει εξίσωση:

$$\varepsilon_3: y - (-1) = -\frac{4}{3}(x - 0) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_3: 3y + 3 = -4x \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_3: 4x + 3y + 3 = 0.$$