

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει $x^2 + 4 > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x , οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A_f = \mathbb{R}$. Η συνάρτηση g ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $x > 0$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $A_g = (0, +\infty)$.

β) Γνωρίζουμε ότι για $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ και $x_1, x_2 > 0$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\log_{\alpha} x_1 = \log_{\alpha} x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Οπότε έχουμε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$\ln(x^2 + 4) = \ln x + \ln 4 \Leftrightarrow$$

$$\ln(x^2 + 4) = \ln(4x) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 4 = 4x \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 2 > 0, \text{ δεκτή.}$$