

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega x$, με $\rho, \omega > 0$:

Έχει ελάχιστο $-\rho$, οπότε έχουμε $-\frac{\alpha+1}{2} = -2 \Leftrightarrow \alpha+1=4 \Leftrightarrow \alpha=3$.

Ακόμα έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$, οπότε έχουμε $\frac{2\pi}{\beta} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta=4$.

Τελικά, η συνάρτηση είναι $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 4x$. (1)

β) Έχουμε για τον αριθμητή:

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sigma\upsilon\nu x, \quad \varepsilon\varphi(\pi-x) = -\varepsilon\varphi x, \quad \eta\mu(2\pi+x) = \eta\mu x.$$

Έχουμε για τον παρονομαστή:

$$\sigma\upsilon\nu(3\pi-x) = \sigma\upsilon\nu(\pi-x) = -\sigma\upsilon\nu x,$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2}-x\right) = \sigma\varphi\left(3\pi + \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = \sigma\varphi\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \varepsilon\varphi x,$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right) = \eta\mu(-x) = -\eta\mu x.$$

$$\text{Αντικαθιστώντας έχουμε } A = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot (-\varepsilon\varphi x) \cdot \eta\mu x}{-\sigma\upsilon\nu x \cdot \varepsilon\varphi x \cdot (-\eta\mu x)} = -1.$$

γ) Έχουμε, λόγω της (1) και του β) ερωτήματος:

$$f(x) = 2A \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu 4x = -2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 4x = -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 4x = \sigma\upsilon\nu \pi \Leftrightarrow$$

$$4x = 2\kappa\pi \pm \pi \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Επειδή πρέπει $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, δηλαδή $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

$$\pi \leq \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{4} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{4} \leq \frac{\kappa}{2} \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq \kappa \leq \frac{5}{2} \stackrel{\kappa \in \mathbb{Z}}{\Rightarrow} \kappa = 2.$$

$$\text{Άρα } x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$\pi \leq \frac{\kappa\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{\kappa}{2} - \frac{1}{4} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{4} \leq \frac{\kappa}{2} \leq \frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq \kappa \leq \frac{7}{2} \stackrel{\kappa \in \mathbb{Z}}{\Rightarrow} \kappa = 3.$$

$$\text{Άρα, πάλι } x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}.$$