

Λύση

α) Για να έχει νόημα η εξίσωση (1) πρέπει οι παραστάσεις στις ρίζες να είναι μη αρνητικές.

Οπότε πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα: $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ και $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.

Συνεπώς $x \in [-2, 2]$.

β) Για $a=0$ η εξίσωση γίνεται: $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = 0$. Το άθροισμα δύο μη αρνητικών ποσοτήτων είναι ίσο με μηδέν αν και μόνο αν και οι δύο είναι ταυτόχρονα 0. Δηλαδή, πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} \sqrt{2-x}=0 \\ \sqrt{x+2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}, \text{ τα οποία είναι αδύνατο να συμβαίνουν ταυτόχρονα.}$$

Συνεπώς, η εξίσωση είναι αδύνατη.

γ) Ισχύει ότι αν $x \in [-2, 2] \Rightarrow -x \in [-2, 2]$, οπότε για τη συνάρτηση g έχουμε:

$g(-x) = \sqrt{2-(-x)} + \sqrt{-x+2} = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} = g(x)$, για κάθε $x \in [-2, 2]$, που είναι το πεδίο ορισμού της g , οπότε η συνάρτηση είναι άρτια.

δ) i)

Η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} &= 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2-x+x+2+2\sqrt{2-x}\sqrt{x+2} = 4 \cdot 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4+2\sqrt{2^2-x^2} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = 2 \Leftrightarrow 4-x^2 = 4 \Leftrightarrow x=0. \end{aligned}$$

Άρα έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

ii) Για $a \neq 2\sqrt{2}$ η εξίσωση (1) έχει ρίζα την $x=\rho$, άρα θα ισχύει ότι $g(\rho)=a$. Όμως η συνάρτηση g είναι άρτια, οπότε θα ισχύει ότι $g(-\rho)=g(\rho)=a$, οπότε και η $x=-\rho$ θα είναι ρίζα της εξίσωσης (1).