

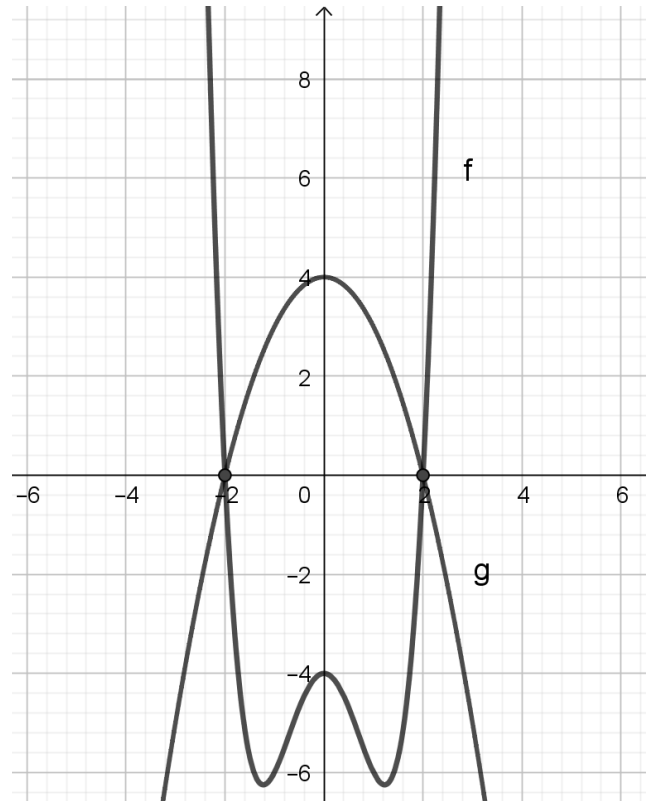
ΛΥΣΗ

α) Οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , άρα έχουμε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Επιπλέον } f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 - 4 = x^4 - 3x^2 - 4 = f(x).$$

$$\text{Όμοια } g(-x) = -(-x)^2 + 4 = -x^2 + 4 = g(x).$$

β) Από το α) ερώτημα οι συναρτήσεις f και g είναι άρτιες. Η γραφική παράσταση άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των f και g συμπληρώνονται όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



γ)

i. Έχουμε $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = -x^2 + 4 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0. \quad (1)$

Θέτουμε $x^2 = y$, οπότε (1): $y^2 - 2y - 8 = 0$ με $\Delta = 36$ και $y_1 = -2, y_2 = 4$, άρα $x^2 = -2$ που είναι αδύνατη ή $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 2$ που είναι οι ζητούμενες λύσεις.

ii. Γραφικά, λύση της ανίσωσης $f(x) < g(x)$ είναι οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της g είναι πάνω από την γραφική παράσταση της f . Οπότε η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-2, 2)$.