

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A = \mathbb{R} - \{0\}$.

Για κάθε $x \in A$, είναι φανερό ότι $-x \in A$ και

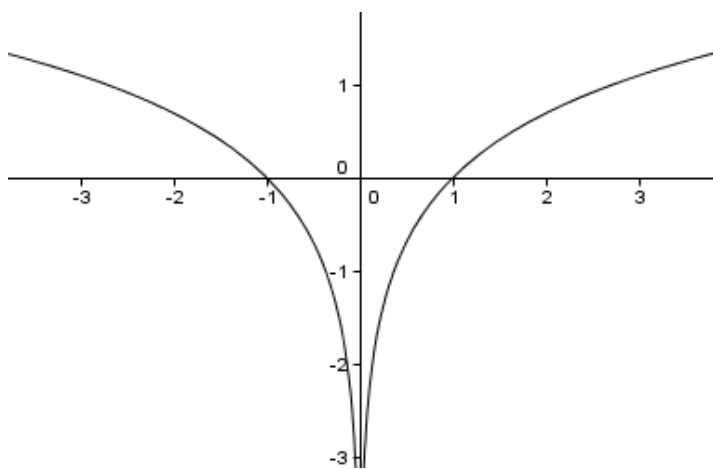
$$f(-x) = \frac{1}{2} \ln(-x)^2 = \frac{1}{2} \ln x^2 = f(x)$$

Επομένως η f είναι άρτια, οπότε η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

β) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2 = \frac{1}{2} \ln |x|^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln |x| = \ln |x| = \ln x$$

γ) Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα και, σύμφωνα με τα προηγούμενα ερωτήματα, προκύπτει αν σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln x, x > 0$ και στη συνέχεια θεωρήσουμε το συμμετρικό του σχήματος ως προς τον άξονα $y'y$.



δ) Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την ευθεία $y=2$, μόνο όταν $f(x) < 2$. Με $x \neq 0$ έχουμε:

$$f(x) < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln x^2 < 2 \Leftrightarrow \ln x^2 < 4 \Leftrightarrow x^2 < e^4 \Leftrightarrow |x| < e^2 \Leftrightarrow -e^2 < x < e^2$$

Άρα, η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την ευθεία $y=2$ για κάθε x με $x \in (-e^2, 0) \cup (0, e^2)$.