

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η εκθετική συνάρτηση πρέπει η βάση

$$\frac{a}{a+5} > 0 \Leftrightarrow a(a+5) > 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty, -5) \cup (0, +\infty).$$

Επιπλέον πρέπει $\frac{a}{a+5} \neq 1$. Όμως, αν $\frac{a}{a+5} = 1 \Leftrightarrow a = a+5 \Leftrightarrow 0 = 5$, το οποίο δε συμβαίνει για

κανέναν πραγματικό αριθμό a .

β) Για να είναι η συνάρτηση γνησίως αύξουσα πρέπει

$$\frac{a}{a+5} > 1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+5} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{a-a-5}{a+5} > 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{a+5} > 0 \Leftrightarrow a+5 < 0 \Leftrightarrow a < -5.$$

γ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα όταν $a < -5$.

Η μεγαλύτερη ακέραια τιμή του $a = -6$, για την οποία η συνάρτηση f είναι εκθετική και

$$\text{γνησίως αύξουσα και γίνεται } f(x) = \left(\frac{-6}{-6+5} \right)^x = 6^x.$$

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$f(x) + f(x+1) = 14 \Leftrightarrow 6^x + 6^{x+1} = 14 \Leftrightarrow 6^x + 6 \cdot 6^x = 14 \Leftrightarrow 7 \cdot 6^x = 14 \Leftrightarrow 6^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_6 2.$$