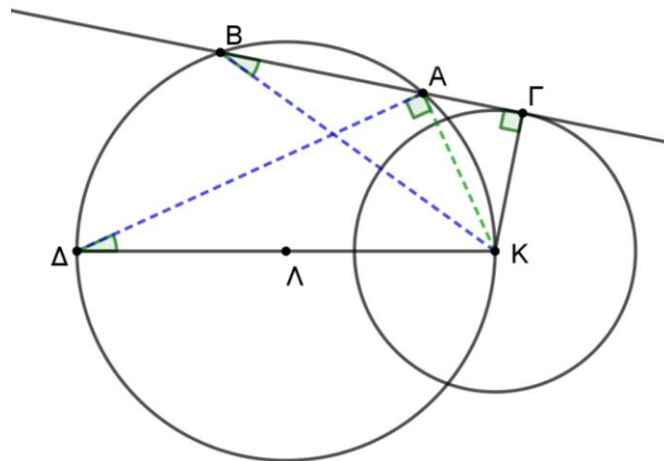


ΛΥΣΗ



α)

- i. Οι γωνίες  $\widehat{ΚΒΓ}$  και  $\widehat{ΚΔΑ}$  είναι εγγεγραμμένες γωνίες του κύκλου  $(Λ, R)$  που βαίνουν στο ίδιο τόξο  $ΚΑ$ , άρα είναι ίσες. Η ευθεία  $ΓΒ$  είναι εφαπτομένη του κύκλου  $(Κ, ρ)$  στο σημείο του  $Γ$ , επομένως η γωνία  $\widehat{ΚΓΒ}$  είναι ορθή. Η  $ΚΔ$  είναι διάμετρος του κύκλου  $(Λ, R)$  και η γωνία  $\widehat{ΚΔΑ}$  είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, άρα είναι ορθή. Τα τρίγωνα  $ΚΓΒ$  και  $ΚΑΔ$  έχουν  $\widehat{ΚΓΒ} = \widehat{ΚΔΑ}$  (ορθές) και  $\widehat{ΚΒΓ} = \widehat{ΚΔΑ}$ , επομένως έχοντας δύο γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια.

- ii. Η  $ΚΔ$  είναι διάμετρος του κύκλου  $(Λ, R)$ , άρα  $ΚΔ = 2 \cdot R = 20$  και η  $ΚΓ$  είναι ακτίνα του κύκλου  $(Κ, ρ)$ , άρα  $ΚΓ = ρ = 6$ . Εφόσον τα τρίγωνα  $ΚΓΒ$  και  $ΚΑΔ$  είναι όμοια, έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή  $\frac{ΚΓ}{ΚΑ} = \frac{ΚΒ}{ΚΔ} = \frac{ΓΒ}{ΔΑ}$ . Από την ισότητα  $\frac{ΚΓ}{ΚΑ} = \frac{ΚΒ}{ΚΔ}$  έχουμε ότι

$$\frac{6}{ΚΑ} = \frac{ΚΒ}{20} \text{ ή } ΚΑ \cdot ΚΒ = 120.$$

β) Αφού είναι  $ΚΒ = 15$  και  $ΚΑ \cdot ΚΒ = 120$  τότε  $15 \cdot ΚΑ = 120$ , άρα  $ΚΑ = 8$ . Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο  $ΚΑΓ$  έχουμε  $ΚΓ^2 + ΓΑ^2 = ΚΑ^2$  ή  $36 + ΓΑ^2 = 64$  ή  $ΓΑ^2 = 28$  ή  $ΓΑ = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ . Το

εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου  $ΑΓΚ$  είναι  $(ΑΓΚ) = \frac{ΚΓ \cdot ΑΚ}{2} = \frac{6 \cdot 2\sqrt{7}}{2} = 6\sqrt{7}$ .