

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο $AB\Delta$ η BO είναι διάμεσος, οπότε χωρίζει το τρίγωνο $AB\Delta$ σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα. Επομένως $(AOB) = (BOD)$.

Ομοίως στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ η GO είναι διάμεσος, οπότε $(AOG) = (GOD)$.

β) Από το α) ερώτημα έχουμε $(AOB) = (BOD)$ (1)

και $(AOG) = (GOD)$ (2).

Προσθέτοντας τις (1), (2) κατά μέλη παίρνουμε $(AOB) + (AOG) = (BOD) + (GOD)$, οπότε $(AOB) + (AOG) = (BOGD)$.

Αφαιρώντας από τα δύο μέλη το (BOG) έχουμε $(AOB) + (AOG) - (BOG) = (BDG)$.

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε $(AOB) + (AOG) - (BOG) = (BDG)$ (3).

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $(BOG) + (AOB) - (AOG) = (GEA)$ (4)

και $(BOG) + (AOG) - (BOA) = (AZB)$ (5).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3), (4), (5) παίρνουμε $(AOB) + (BOG) + (AOG) = (DBG) + (EGA) + (ZAB)$, άρα $(ABG) = (BDG) + (GEA) + (AZB)$.

Επομένως $2(ABG) = (ABG) + (DBG) + (EGA) + (ZAB) = (AZBΔΓΕ)$.