

ΛΥΣΗ

Από τα δεδομένα έχουμε: $AB = \Delta\Gamma = 2\alpha$, $AD = B\Gamma = \alpha$, $MB = x$ και $AM = 2\alpha - x$

α) Από το ορθογώνιο τρίγωνο $MB\Gamma$ έχουμε: $M\Gamma^2 = MB^2 + B\Gamma^2 = \alpha^2 + x^2$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta N\Gamma$ έχουμε:

$$N\Gamma^2 = N\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = (2x)^2 + (2\alpha)^2 = 4x^2 + 4\alpha^2.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο AMN έχουμε:

$$MN^2 = AN^2 + AM^2 = (\alpha + 2x)^2 + (2\alpha - x)^2 = \alpha^2 + 4x^2 + 4\alpha x + 4\alpha^2 + x^2 - 4\alpha x = 5\alpha^2 + 5x^2.$$

β) Από το α) έπεται $M\Gamma^2 + \Gamma N^2 = \alpha^2 + x^2 + 4x^2 + 4\alpha^2 = 5\alpha^2 + 5x^2 = MN^2$,

κατά συνέπεια το τρίγωνο $MN\Gamma$ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη MN .

γ) Από τα δεδομένα και το ερώτημα α) τα τρίγωνα AMN και ΓMN είναι ορθογώνια οπότε:

$$(AMN) = \frac{1}{2} AM \cdot AN = \frac{1}{2} (2\alpha - x)(\alpha + 2x) = \frac{1}{2} (2\alpha^2 + 4\alpha x - \alpha x - 2x^2) =$$

$$\frac{1}{2} (2\alpha^2 + 3\alpha x - 2x^2).$$

$$(M\Gamma N) = \frac{1}{2} M\Gamma \cdot \Gamma N = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 + x^2} \cdot \sqrt{4\alpha^2 + 4x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4(\alpha^2 + x^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot 2 (\alpha^2 + x^2) = \alpha^2 + x^2.$$

δ) Λόγω του ερωτήματος β) έχουμε:

$$(AMN) = (M\Gamma N) \Leftrightarrow \frac{1}{2} (2\alpha^2 + 3\alpha x - 2x^2) = \alpha^2 + x^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 3\alpha x - 2x^2 = 2\alpha^2 + 2x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 3\alpha x \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{3}{4} \alpha, \text{ οπότε } AM = \frac{3}{4} \alpha, \text{ άρα γνωστή η θέση του } M.$$