

ΛΥΣΗ

α)

- i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AK\Gamma$ ($\widehat{K} = 90^\circ$), είναι $AG = 15$ και $AK = 9$,

οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$\Gamma K^2 = AG^2 - AK^2 \quad \text{ή} \quad \Gamma K^2 = 15^2 - 9^2 \quad \text{ή} \quad \Gamma K^2 = 144 \quad \text{ή} \quad \Gamma K^2 = 12^2 \quad \text{ή} \quad \Gamma K = 12.$$

Το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ είναι

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot \Gamma K \quad \text{ή} \quad (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 \quad \text{ή} \quad (AB\Gamma) = 60.$$

- ii. Στα τρίγωνα $\triangle ADB$ και $\triangle AD\Gamma$, οι γωνίες \widehat{DAB} και \widehat{DAG} είναι ίσες, αφού η AD είναι διχοτόμος της γωνίας \widehat{A} του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα

$$\frac{(ADB)}{(AD\Gamma)} = \frac{AD \cdot AB}{AD \cdot AG} = \frac{AB}{AG} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}, \quad \text{άρα} \quad (ADB) = \frac{2}{3} (AD\Gamma).$$

Στο ερώτημα α) i) βρήκαμε ότι $(AB\Gamma) = 60$ και επειδή $(ADB) + (AD\Gamma) = (AB\Gamma)$,

$$\text{έχουμε} \quad \frac{2}{3} (AD\Gamma) + (AD\Gamma) = 60 \quad \text{ή} \quad 5(AD\Gamma) = 180 \quad \text{ή} \quad (AD\Gamma) = 36.$$

$$\text{Επίσης θα είναι} \quad (ADB) = \frac{2}{3} (AD\Gamma) \quad (ADB) = \frac{2}{3} \cdot 36 = 24.$$

β)

- i. Τα τρίγωνα $\triangle ADB$ και $\triangle AB\Gamma$ έχουν κοινή βάση την AB και αντίστοιχα ύψη $\Delta\Lambda$ και ΓK , άρα ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών.

Στο (α) ερώτημα βρήκαμε $(AB\Gamma) = 60$ και $(ADB) = 24$, επομένως έχουμε

$$\frac{(ADB)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Delta\Lambda}{\Gamma K} \quad \text{ή} \quad \frac{24}{60} = \frac{\Delta\Lambda}{\Gamma K} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta\Lambda}{\Gamma K} = \frac{2}{5}.$$

- ii. Οι ευθείες $\Delta\Lambda$ και ΓK είναι παράλληλες, ως κάθετες στην ευθεία AB . Επομένως τα τρίγωνα $\triangle \Delta\Lambda B$ και $\triangle \Gamma K B$ έχουν πλευρές ανάλογες, άρα έχουμε

$$\frac{\Delta B}{KB} = \frac{\Delta\Lambda}{\Gamma K} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta B}{KB} = \frac{2}{5} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta B}{KB - \Delta B} = \frac{2}{5-2} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta B}{\Lambda K} = \frac{2}{3}.$$