

α) i) Το τετράπλευρο ΑΒΓΚ είναι ορθογώνιο αφού έχει τρεις ορθές γωνίες, άρα $AK = B\Gamma = 16$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΔ ($\widehat{ΑΚΔ} = 90^\circ$), έχουμε

$$K\Delta^2 = A\Delta^2 - AK^2$$

$$K\Delta^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144 = 12^2$$

$$K\Delta = 12.$$

ii) Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΔ είναι

$$(\text{AK}\Delta) = \frac{1}{2} \text{K}\Delta \cdot \text{AK} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96.$$

β) Τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι ορθογώνια ($\widehat{ΑΚΔ} = \widehat{ΒΛΑ} = 90^\circ$) και έχουν

$\hat{\Delta} = \Lambda\hat{A}B$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων AB και $\Delta\Gamma$ που τέμνονται από την $\Lambda\Delta$. Άρα τα τρίγωνα $AK\Delta$ και $B\Lambda A$ είναι όμοια.

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι

$$\lambda = \frac{A\Delta}{B\Delta} \quad \text{ή} \quad \lambda = \frac{20}{10} \quad \text{ή} \quad \lambda = 2,$$

αφού $BA = K\Gamma$ από το ορθογώνιο $AB\Gamma K$ και $K\Gamma = \Gamma\Delta - K\Delta = 22 - 12 = 10$.

Επειδή τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = 2$, ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΚΔ και ΒΛΑ ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, άρα

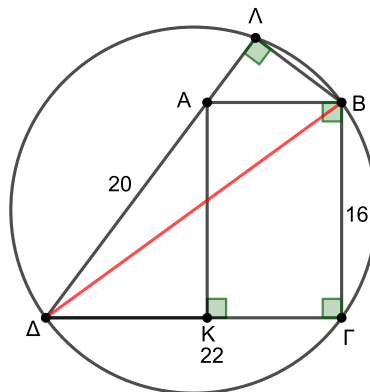
$$\frac{(AK\Delta)}{(B\Lambda A)} = \lambda^2$$

$$\frac{96}{(\text{B}\Lambda\text{A})} = 2^2$$

$$(\text{B}\Lambda\text{A}) = \frac{96}{4}$$

$$(\text{B}\Lambda\text{A}) = 24.$$

γ) Φέρνουμε τη ΒΔ, η οποία είναι διάμετρος του παραπάνω κύκλου, αφού $\widehat{B\Gamma\Delta} = 90^\circ$.



Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ ($\widehat{B\Gamma\Delta} = 90^\circ$), έχουμε

$$B\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2$$

$$B\Delta^2 = 16^2 + 22^2 = 256 + 484 = 740 = 4 \cdot 185$$

$$B\Delta = 2\sqrt{185}.$$

Επομένως η διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου $B\Gamma\Delta\Lambda$ έχει μήκος $2\sqrt{185}$.