

ΛΥΣΗ

α) i) Δίνεται  $ΛΑ = 2ΛΚ$ .

Στα τρίγωνα  $ΑΛΓ$  και  $ΓΛΚ$ , οι γωνίες  $Α\hat{Λ}Γ$  και  $Γ\hat{Λ}Κ$  είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{ΛΓ \cdot ΛΑ}{ΛΓ \cdot ΛΚ} = \frac{ΛΑ}{ΛΚ} = \frac{2ΛΚ}{ΛΚ} = 2 \quad \text{ή} \quad \frac{E_1}{E_2} = 2 \quad (1).$$

Στα τρίγωνα  $ΑΛΒ$  και  $ΒΛΚ$ , οι γωνίες  $Α\hat{Λ}Β$  και  $Β\hat{Λ}Κ$  είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως

$$\frac{E_4}{E_3} = \frac{ΛΒ \cdot ΛΑ}{ΛΒ \cdot ΛΚ} = \frac{ΛΑ}{ΛΚ} = \frac{2ΛΚ}{ΛΚ} = 2 \quad \text{ή} \quad \frac{E_4}{E_3} = 2 \quad (2).$$

ii) Δίνεται  $ΚΒ = 2ΚΓ$ .

Στα τρίγωνα  $ΒΛΚ$  και  $ΓΛΚ$  οι γωνίες  $Λ\hat{Κ}Β$  και  $Λ\hat{Κ}Γ$  είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως

$$\frac{E_3}{E_2} = \frac{ΚΛ \cdot ΚΒ}{ΚΛ \cdot ΚΓ} = \frac{ΚΒ}{ΚΓ} = \frac{2ΚΓ}{ΚΓ} = 2 \quad \text{ή} \quad \frac{E_3}{E_2} = 2 \quad (3).$$

Από τις (1) και (3) έχουμε

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_3}{E_2}, \text{ οπότε } E_1 = E_3 \quad (4).$$

β) Δίνεται  $E_1 = 10$ .

Από την (1) έχουμε

$$\frac{E_1}{E_2} = 2 \quad \text{ή} \quad \frac{10}{E_2} = 2 \quad \text{ή} \quad E_2 = 5.$$

Από την (4) έχουμε

$$E_3 = E_1 \quad \text{ή} \quad E_3 = 10.$$

Από την (2) έχουμε

$$\frac{E_4}{E_3} = 2 \quad \text{ή} \quad \frac{E_4}{10} = 2 \quad \text{ή} \quad E_4 = 20.$$

Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου  $ΑΒΓ$  είναι

$$(ΑΒΓ) = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 \quad \text{ή} \quad (ΑΒΓ) = 10 + 5 + 10 + 20 = 45.$$