

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 8$, $B\Gamma = 7$ και $\hat{A} = 60^\circ$, οπότε από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2AB \cdot A\Gamma \cdot \sin A$$

$$7^2 = 8^2 + A\Gamma^2 - 2 \cdot 8 \cdot A\Gamma \cdot \sin 60^\circ$$

$$49 = 64 + A\Gamma^2 - 16 \cdot A\Gamma \cdot \frac{1}{2}$$

$$A\Gamma^2 - 8 \cdot A\Gamma + 15 = 0$$

$$A\Gamma = 3 \text{ ή } A\Gamma = 5.$$

β) i) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 8$, $B\Gamma = 7$ και $A\Gamma = 3$ ή $A\Gamma = 5$, άρα η μεγαλύτερη πλευρά του είναι η $AB = 8$, οπότε $AB^2 = 8^2 = 64$.

Αν $A\Gamma = 3$ θα είναι $A\Gamma^2 + B\Gamma^2 = 3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$, οπότε

$AB^2 > A\Gamma^2 + B\Gamma^2$, άρα $\hat{\Gamma} > 90^\circ$, άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο, άτοπο.

Αν $A\Gamma = 5$ θα είναι $A\Gamma^2 + B\Gamma^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$, οπότε

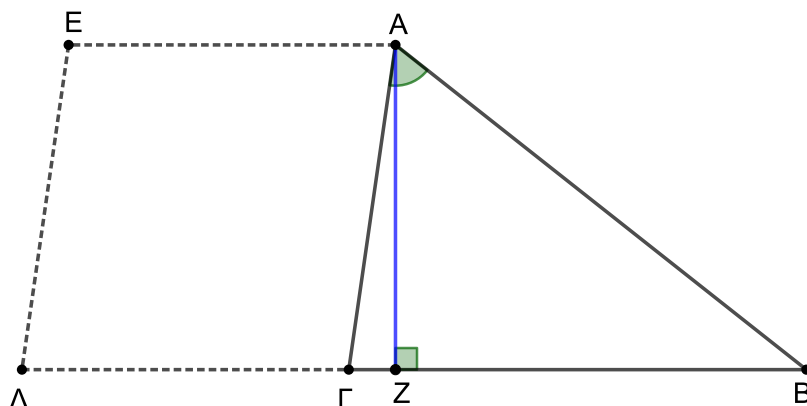
$AB^2 < A\Gamma^2 + B\Gamma^2$, άρα $\hat{\Gamma} < 90^\circ$, άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο.

Επομένως $A\Gamma = 5$.

ii) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 8$, $A\Gamma = 5$ και $\hat{A} = 60^\circ$, οπότε από τον τριγωνομετρικό τύπο του εμβαδού έχουμε

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot A\Gamma \cdot AB \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \eta\mu 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}.$$

iii) Έστω AZ το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ από την κορυφή A . Τότε αυτό θα είναι ύψος και του ρόμβου $A\Gamma\Delta E$ με αντίστοιχη βάση την $\Gamma\Delta$. Είναι $\Gamma\Delta = A\Gamma = 5$ επειδή το $A\Gamma\Delta E$ είναι ρόμβος.



Από το (β ii) είναι $(AB\Gamma) = 10\sqrt{3}$. Επειδή $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot AZ$ και $B\Gamma = 7$, θα έχουμε

$$\frac{1}{2} \cdot BG \cdot AZ = 10\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot AZ = 10\sqrt{3}$$

$$AZ = \frac{20\sqrt{3}}{7} .$$

Επομένως το εμβαδόν του ρόμβου ΑΓΔΕ είναι

$$(ΑΓΔΕ) = ΓΔ \cdot AZ = 5 \cdot \frac{20\sqrt{3}}{7} = \frac{100\sqrt{3}}{7} .$$