

ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα έχουμε: $AB = \gamma$, $AG = \beta$ και $BG = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma}$.

Είναι: $BG^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$ και $AG^2 + AB^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

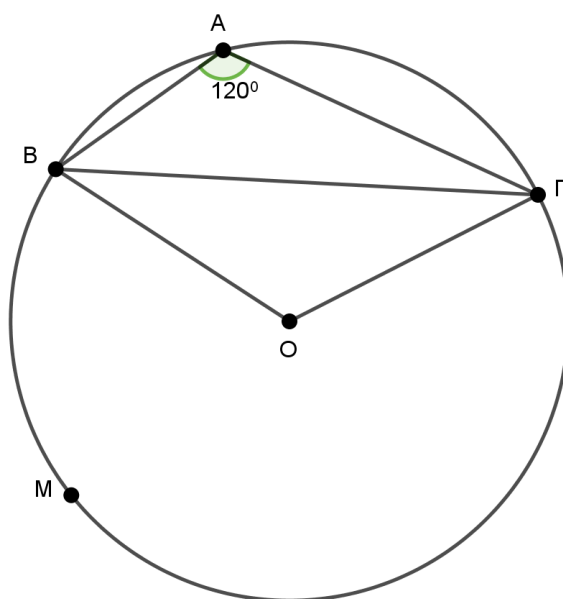
Οπότε: $BG^2 > AG^2 + AB^2 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ$, άρα το τρίγωνο ABG είναι αμβλυγώνιο.

β) Στο τρίγωνο ABG , από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$BG^2 = AG^2 + AB^2 - 2AG \cdot AB \cdot \sin A = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sin A.$$

Επίσης από το ερώτημα (α): $BG^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$.

Άρα: $\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sin A = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$ ή $\sin A = -\frac{1}{2}$, άρα $\hat{A} = 120^\circ$.



γ) Η γωνία BAG είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, οπότε το τόξο στο οποίο βαίνει θα έχει μέτρο διπλάσιο από αυτήν. Άρα $\widehat{BM\Gamma} = 2 \cdot 120^\circ = 240^\circ$.

Έτσι για το κυρτογώνιο τόξο BAG θα ισχύει: $\widehat{BA\Gamma} = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$, οπότε η επίκεντρη γωνία $BO\Gamma$ ισούται με 120° .

δ) Λόγω του ερωτήματος (γ) είναι: $\widehat{BO\Gamma} = 120^\circ$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$\begin{aligned} E &= (O \widehat{BA\Gamma}) - (OB\Gamma) = \frac{\pi R^2 \mu}{360} - \frac{1}{2} OB \cdot O\Gamma \cdot \eta\mu 120^\circ = \frac{\pi R^2 120}{360} - \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi R^2 - 3\sqrt{3}R^2}{12} = \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}. \end{aligned}$$

