

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ABZ έχουμε ότι

$$BZ^2 = AB^2 + AZ^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $AZ = \frac{3}{4}AB$, οπότε

$$BZ^2 = AB^2 + \left(\frac{3}{4}AB\right)^2 \text{ ή } BZ^2 = \frac{25}{16}AB^2 \text{ ή } BZ = \frac{5}{4}AB.$$

β) Αφού το ABΓΔ είναι τετράγωνο, θα είναι $AD = BG = AB$.

Επιπλέον,

$$DZ = AD - AZ = AB - \frac{3}{4}AB = \frac{1}{4}AB.$$

ι. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο BΓΕ έχουμε ότι

$$BE^2 = B\Gamma^2 + GE^2 \text{ ή } BE^2 = AB^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 \text{ ή } BE^2 = \frac{5}{4}AB^2.$$

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΖ έχουμε ότι

$$ZE^2 = DZ^2 + DE^2 \text{ ή } ZE^2 = \left(\frac{1}{4}AB\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 \text{ ή } ZE^2 = \frac{5}{16}AB^2.$$

ii. Από τα ερωτήματα α και βί έχουμε ότι

$$BE^2 + ZE^2 = \frac{5}{4}AB^2 + \frac{5}{16}AB^2 = \frac{25}{16}AB^2 = BZ^2.$$

Σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος το τρίγωνο BEZ είναι ορθογώνιο με $\widehat{BEZ} = 90^\circ$.

$$\gamma) \text{ Είναι } \frac{BE}{B\Gamma} = \frac{\sqrt{\frac{5}{4}}AB}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ και } \frac{ZE}{E\Gamma} = \frac{\sqrt{\frac{5}{16}}AB}{\frac{1}{2}AB} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Τα τρίγωνα BEZ και BΓΕ έχουν:

- $\frac{BE}{B\Gamma} = \frac{ZE}{E\Gamma}$ και
- $\widehat{BEZ} = \widehat{B\Gamma E} = 90^\circ$.

Άρα τα τρίγωνα BEZ και BΓΕ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.

Ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, οπότε

$$\frac{(BEZ)}{(B\Gamma E)} = \left(\frac{BE}{B\Gamma}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$