

ΛΥΣΗ

α) i. Για το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου ισχύει ότι $E_{\text{EF}} = E_3 - E_2$.

$$\text{Επίσης } \frac{E_{\text{EF}}}{E_2} = \frac{E_3 - E_2}{E_2} \quad \text{ή} \quad \frac{7}{9} = \frac{\pi \rho_3^2 - \pi \rho_2^2}{\pi \rho_2^2} \quad \text{ή} \quad \frac{7}{9} = \frac{\pi(\rho_3^2 - \rho_2^2)}{\pi \rho_2^2} \quad \text{ή} \quad \frac{7}{9} = \frac{\rho_3^2 - \rho_2^2}{\rho_2^2} \quad \text{ή}$$

$$7\rho_2^2 = 9\rho_3^2 - 9\rho_2^2 \quad \text{ή} \quad 16\rho_2^2 = 9\rho_3^2 \quad \text{ή} \quad \frac{\rho_2^2}{\rho_3^2} = \frac{9}{16} \quad \text{ή} \quad \left(\frac{\rho_2}{\rho_3}\right)^2 = \frac{9}{16} \quad \text{ή} \quad \frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{3}{4}.$$

ii. Τα εμβαδά των κύκλων (A, ρ_2) και (A, ρ_3) είναι $E_2 = \pi \rho_2^2$ και $E_3 = \pi \rho_3^2$, αντίστοιχα.

$$\text{Άρα } \frac{E_2}{E_3} = \frac{\pi \rho_2^2}{\pi \rho_3^2} = \frac{\rho_2^2}{\rho_3^2} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_3}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

iii. Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΔDE που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών AB και AG του τριγώνου ABG και την παράλληλη ΔE στην πλευρά του BG έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ABG . Άρα:

$$\frac{\text{AD}}{\text{AB}} = \frac{\text{AE}}{\text{AG}} = \frac{\Delta\text{E}}{\text{BG}} \quad \text{ή} \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{\Delta\text{E}}{\text{BG}}$$

Άρα, από την απάντηση στο α) i έχουμε $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{3}{4}$.

$$\beta) \text{ Έχουμε } E_{\text{EF}} = E_3 - E_2 \quad \text{ή} \quad E_2 = E_3 - E_2 \quad \text{ή} \quad 2E_2 = E_3 \quad \text{ή} \quad 2\pi \rho_2^2 = \pi \rho_3^2 \quad \text{ή} \quad 2\rho_2^2 = \rho_3^2 \quad \text{ή} \quad \rho_3 = \rho_2 \sqrt{2}.$$

Όπως στο α) iii, από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΔDE έχει πλευρές

$$\text{ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου } \text{ABG}. \text{ Άρα } \frac{\text{AD}}{\text{AB}} = \frac{\text{AE}}{\text{AG}} = \frac{\Delta\text{E}}{\text{BG}} \quad \text{ή} \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{\Delta\text{E}}{\text{BG}}.$$

$$\text{Επομένως } \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_2}{\rho_2 \sqrt{2}} \quad \text{ή} \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ή} \quad \rho_2 = \rho_1 \sqrt{2} \quad \text{ή} \quad \rho_2^2 = \rho_1^2 (\sqrt{2})^2 \quad \text{ή} \quad \rho_2^2 = 2\rho_1^2 \quad \text{ή} \quad \pi \rho_2^2 = 2\pi \rho_1^2$$

$$\text{ή} \quad E_2 = 2E_1.$$

Επίσης, για το εμβαδόν $E_{\Delta\text{B}}$ του δακτυλίου που είναι χρωματισμένος στο παρακάτω σχήμα έχουμε $E_{\Delta\text{B}} = E_2 - E_1$ ή $E_{\Delta\text{B}} = 2E_1 - E_1$ ή $E_{\Delta\text{B}} = E_1$.

