

ΛΥΣΗ

α) i. Το εμβαδόν E_{AE} του κύκλου (A, r) είναι ίσο με $E_{AE} = \pi \cdot r^2$ και το εμβαδόν E_{EF} του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, r) και (A, R) είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών των δύο κύκλων, δηλαδή $E_{EF} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2$ ή $E_{EF} = \pi(R^2 - r^2)$.

$$\text{Άρα } \frac{E_{EF}}{E_{AE}} = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{\pi \cdot r^2} \quad \text{ή} \quad \frac{E_{EF}}{E_{AE}} = \frac{R^2 - r^2}{r^2}.$$

ii. Με όμοιους συλλογισμούς προκύπτει ότι $E_{AD} = \pi \cdot \rho^2$ και $E_{AB} = \pi(r^2 - \rho^2)$.

$$\text{Άρα } \frac{E_{AB}}{E_{AD}} = \frac{r^2 - \rho^2}{\rho^2}.$$

β) Από τα α)i) και α)ii), για να αποδείξουμε τη ζητούμενη ισότητα $\frac{E_{EF}}{E_{AE}} = \frac{E_{AB}}{E_{AD}}$ αρκεί να

$$\text{αποδείξουμε ότι } \frac{R^2 - r^2}{r^2} = \frac{r^2 - \rho^2}{\rho^2} \quad \text{ή} \quad \frac{R^2}{r^2} - 1 = \frac{r^2}{\rho^2} - 1 \quad \text{ή} \quad \frac{R^2}{r^2} = \frac{r^2}{\rho^2} \quad \text{ή} \quad \frac{R}{r} = \frac{r}{\rho}.$$

Η τελευταία ισότητα είναι αληθής, γιατί:

Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ADE που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών AB και AG του τριγώνου ABG και την παράλληλη DE στην πλευρά του BG έχει πλευρές

$$\text{ανάλογες προς τις πλευρές του } ABG. \text{ Άρα } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AG} \quad \text{ή} \quad \frac{\rho}{r} = \frac{r}{R} \quad \text{ή} \quad \frac{R}{r} = \frac{r}{\rho}.$$