

## ΛΥΣΗ

α) i. Το E είναι μέσο της ΑΓ, άρα  $ΑΓ = 2ΓΕ$  ή  $\frac{ΓΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{2}$ .

Ομοίως το Δ είναι μέσο της ΒΓ, άρα  $\frac{ΓΔ}{ΒΓ} = \frac{1}{2}$ .

Άρα τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΑΒΓ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, εφόσον η  $\hat{\Gamma}$  είναι κοινή γωνία. Επομένως τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας τον λόγο των ομόλογων πλευρών τους, δηλαδή  $\frac{1}{2}$ .

ii. Άρα τα εμβαδά (ΕΔΓ) και (ΑΒΓ) των τριγώνων ΕΔΓ και ΑΒΓ αντίστοιχα έχουν λόγο ίσο με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. Επομένως:

$$\frac{(ΕΔΓ)}{(ΑΒΓ)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{ή} \quad (ΕΔΓ) = \frac{1}{4} \cdot (ΑΒΓ)$$

Με ανάλογους συλλογισμούς με εκείνους του α) i προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΖΒΔ και ΑΒΓ είναι επίσης όμοια με λόγο ομοιότητας  $\frac{1}{2}$ , εφόσον:

- Το Ζ είναι μέσο της ΑΒ.
- Το Δ είναι μέσο της ΒΓ.
- Η περιεχόμενη γωνία  $\hat{B}$  των ΒΖ, ΒΔ και ΑΒ, ΒΓ είναι κοινή.

Επομένως για το εμβαδόν (ΖΒΔ) του τριγώνου ΖΒΔ ισχύει ότι  $(ΖΒΔ) = \frac{1}{4} \cdot (ΑΒΓ) = (ΕΔΓ)$ .

Επίσης για το εμβαδόν (ΑΕΔΖ) του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ ισχύει ότι:

$$(ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - (ΕΔΓ) - (ΖΒΔ) \quad \text{ή} \quad (ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - 2(ΕΔΓ).$$

iii. Ή αλλιώς:

$$(ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (ΑΒΓ) = (ΑΒΓ) - \frac{1}{2} \cdot (ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot (ΑΒΓ)$$

β) Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ με το τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ της απέναντι πλευράς ΒΓ. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΓ έχουν κοινή γωνία την  $\hat{A}_1 = \hat{\Delta A E}$ , επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία  $\hat{A}_1$ . Άρα  $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΔΓ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΕ}{ΑΔ \cdot ΑΓ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{2}$ , εφόσον το Ε είναι μέσο της ΑΓ.

$$\text{Άρα } (A\Delta E) = \frac{(A\Delta\Gamma)}{2}.$$

(Εναλλακτικά: Η διάμεσος ΔΕ της πλευράς ΑΓ του τριγώνου ΑΔΓ το χωρίζει σε δύο τρίγωνα με ίσα εμβαδά, τα ΑΔΕ και ΔΕΓ. Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΔΓ).

$$\text{Με όμοιους συλλογισμούς για τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΔΒ έχουμε } (A\Delta Z) = \frac{(A\Delta B)}{2}.$$

Όμως για το εμβαδόν (ΑΕΔΖ) του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ ισχύει ότι:

$$(A\epsilon\Delta Z) = (A\Delta E) + (A\Delta Z) \quad \text{ή} \quad (A\epsilon\Delta Z) = \frac{(A\Delta\Gamma)}{2} + \frac{(A\Delta B)}{2} = \frac{(A\Delta\Gamma) + (A\Delta B)}{2} = \frac{(A\beta\Gamma)}{2}.$$

Άρα το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το  $\frac{1}{2}$  του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

