

## ΛΥΣΗ

α) i. Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την ΔΕ, παράλληλη προς τη ΒΓ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΒΓ. Άρα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, με:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AG} = \frac{DE}{BG}$$

Ο λόγος ομοιότητας λ των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι:

$$\lambda = \frac{AE}{AG} = \frac{AE}{3AE} = \frac{1}{3}$$

Επειδή ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, ο λόγος των εμβαδών (ΑΔΕ) και (ΑΒΓ) των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ αντίστοιχα είναι:

$$\frac{(ADE)}{(ABG)} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

ii. Οι γωνίες  $\hat{A}_1$  και  $\hat{A}_2$ , των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΔΖ αντίστοιχα είναι παραπληρωματικές.

Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους (ΑΔΕ) και (ΑΔΖ) αντίστοιχα είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Δηλαδή:

$$\frac{(ADE)}{(ADZ)} = \frac{AD \cdot AE}{AD \cdot AZ} \quad \text{ή} \quad \frac{(ADE)}{(ADZ)} = \frac{AE}{AZ} \quad \text{ή} \quad \frac{(ADE)}{(ADZ)} = 1, \text{ γιατί } AE = AZ$$

Άρα τα εμβαδά των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΔΖ είναι ίσα.

(Εναλλακτικά: η ΑΔ είναι διάμεσος της πλευράς ΕΖ του τριγώνου ΔΕΖ, άρα το χωρίζει σε δύο τρίγωνα με ίσα εμβαδά, τα ΑΔΕ και ΑΔΖ).

Για το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ ισχύει ότι  $(\Delta EZ) = (ADE) + (ADZ) = 2(ADE)$ .

Επομένως:

$$\frac{(\Delta EZ)}{(ABG)} = \frac{2(ADE)}{(ABG)} = 2 \frac{(ADE)}{(ABG)} = 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9}.$$

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ είναι ίσο με τα  $\frac{2}{9}$  του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Έστω  $\lambda = \frac{AE}{AG}$ . Τότε με όμοιους συλλογισμούς με το ερώτημα α) έχουμε ότι τα τρίγωνα

ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο λ και για τα εμβαδά τους ισχύει ότι  $\frac{(ADE)}{(ABG)} = \lambda^2$ .

Επίσης, εφόσον  $AE = AZ$  τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΖ έχουν ίσα εμβαδά, ανεξάρτητα από την τιμή του λόγου λ και  $(\Delta EZ) = (ADE) + (ADZ) = 2(ADE)$ , όπως στο α)ii).

Άρα:

$$\frac{(\Delta EZ)}{(\Delta BG)} = \frac{2(\Delta AE)}{(\Delta BG)} = 2 \frac{(\Delta AE)}{(\Delta BG)} = 2\lambda^2$$

Εφόσον το εμβαδόν του  $\Delta EZ$  είναι ίσο με το  $\frac{1}{2}$  του εμβαδού του  $\Delta BG$  έχουμε ότι:

$$\frac{(\Delta EZ)}{(\Delta BG)} = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad 2\lambda^2 = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \lambda^2 = \frac{1}{4} \quad \text{ή} \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

Άρα  $\frac{AE}{AG} = \frac{1}{2}$ .