

## ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ABΓ που ορίζεται από τις προεκτάσεις των πλευρών ΔΑ και ΕΑ του τριγώνου ΑΔΕ και την ΒΓ, παράλληλη προς τη ΔΕ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΔΕ. Άρα τρίγωνα ABΓ και ΑΔΕ είναι όμοια, με:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{A\Gamma}{AE} = \frac{B\Gamma}{DE}$$

Επειδή ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, αν ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ABΓ και ΑΔΕ είναι ίσος με  $\lambda$ , τότε:

$$\lambda^2 = \frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} \quad \text{ή} \quad \lambda^2 = \frac{1}{4} \quad \text{ή} \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

β) Το εμβαδόν (ABΓ) του τριγώνου ABΓ είναι ίσο με  $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot A\Gamma \cdot \eta\mu\phi$  ή

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \eta\mu\phi \quad \text{ή} \quad (AB\Gamma) = 10\eta\mu\phi.$$

Όμως  $\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \frac{1}{4}$  ή  $(A\Delta E) = 4(AB\Gamma)$ . Δηλαδή το εμβαδόν του ΑΔΕ είναι τετραπλάσιο του εμβαδού του ABΓ. Άρα  $(A\Delta E) = 4 \cdot 10\eta\mu\phi$  ή  $(A\Delta E) = 40\eta\mu\phi$ .

γ) Έχουμε ότι  $(AB\Gamma) = \frac{1}{4} \cdot (A\Delta E)$ .

Έστω σημείο Ζ εσωτερικό της ΑΔ ώστε  $(A\Gamma Z) = \frac{1}{4} \cdot (A\Delta E)$  ή  $(A\Gamma Z) = (AB\Gamma)$  ή  $\frac{(AB\Gamma)}{(A\Gamma Z)} = 1$ .

Επίσης οι γωνίες  $\hat{\phi}$  και  $\hat{\omega}$ , των τριγώνων ABΓ και ΑΓΖ αντίστοιχα είναι παραπληρωματικές.

Επομένως ο λόγος των εμβαδών (ABΓ) και (ΑΓΖ) των τριγώνων ABΓ και ΑΓΖ αντίστοιχα είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Δηλαδή:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A\Gamma Z)} = \frac{AB \cdot A\Gamma}{A\Gamma \cdot AZ}$$

Άρα  $\frac{AB \cdot A\Gamma}{A\Gamma \cdot AZ} = 1$  ή  $\frac{AB}{AZ} = 1$  ή  $AZ = AB$  ή  $AZ = \frac{AD}{2}$ , εφόσον οι πλευρές AB και AD είναι

ομόλογες σε όμοια τρίγωνα ABΓ και ΑΔΕ με λόγο ομοιότητας  $\lambda = \frac{1}{2}$  (από το α)).

Επομένως το σημείο Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΑΔ του τριγώνου ΑΔΕ.

(Εναλλακτικά: τα τρίγωνα ABΓ και ΑΓΖ έχουν κοινό ύψος από την κορυφή Γ και εφόσον έχουν ίσα εμβαδά, θα έχουν και ίσες βάσεις  $AZ = AB$ ).

