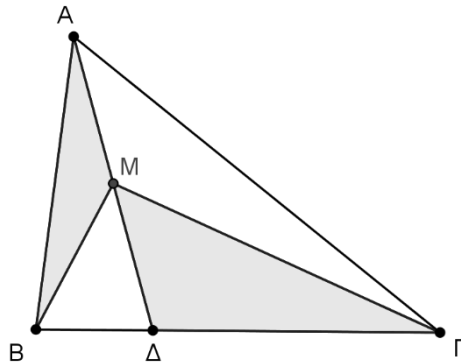


ΛΥΣΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, Δ σημείο της ΒΓ και Μ το μέσο του τμήματος ΑΔ.



α)

i. Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΒΜ είναι διάμεσος στην πλευρά του ΑΔ, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΒΔ θα έχουν ίσα εμβαδά γιατί έχουν ίσες βάσεις, τις ΜΑ και ΜΔ αντίστοιχα και κοινό ύψος από την κορυφή Β στον φορέα της πλευράς ΑΔ. Οπότε $(ABM) = (MBΔ) = \frac{1}{2} (ABΔ)$, δηλαδή $(ABM) = \frac{1}{2} (ABΔ) \quad (1)$.

ii. Στο τρίγωνο ΑΓΔ η ΓΜ είναι διάμεσος στην πλευρά του ΑΔ, οπότε τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΜΓΔ θα έχουν ίσα εμβαδά, γιατί έχουν ίσες βάσεις, τις ΜΑ και ΜΔ αντίστοιχα και κοινό ύψος από την κορυφή Γ στον φορέα της πλευράς ΑΔ. Οπότε $(AGM) = (MΔΓ) = \frac{1}{2} (AGΔ)$, δηλαδή $(MΔΓ) = \frac{1}{2} (AGΔ) \quad (2)$.

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη θα έχουμε ότι:

$$(ABM) + (MΔΓ) = \frac{1}{2} (ABΔ) + \frac{1}{2} (AGΔ) = \frac{1}{2} [(ABΔ) + (AGΔ)] = \frac{1}{2} (ABΓ)$$

β) Αν είναι $(ABM) = (MΔΓ)$, τότε από τις σχέσεις (1) και (2) θα ισχύει:

$$\frac{1}{2} (ABΔ) = \frac{1}{2} (AGΔ) \text{ ή } (ABΔ) = (AGΔ)$$

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν το ίδιο ύψος από την κοινή τους κορυφή Α στον φορέα των βάσεων τους ΒΔ και ΔΓ. Επομένως για να έχουν ίσα εμβαδά αρκεί να έχουν ίσες βάσεις, δηλαδή $BΔ = ΔΓ$. Αυτό θα συμβαίνει όταν το Δ είναι το μέσο της ΒΓ.

Όταν το σημείο Δ είναι το μέσο της ΒΓ, τότε $(ABM) = \frac{1}{2} (ABΔ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (ABΓ) = \frac{1}{4} (ABΓ)$. Όμοια $(MΔΓ) = \frac{1}{4} (ABΓ)$.

$$\text{Δηλαδή } (ABM) = (MΔΓ) = \frac{1}{4} (ABΓ)$$