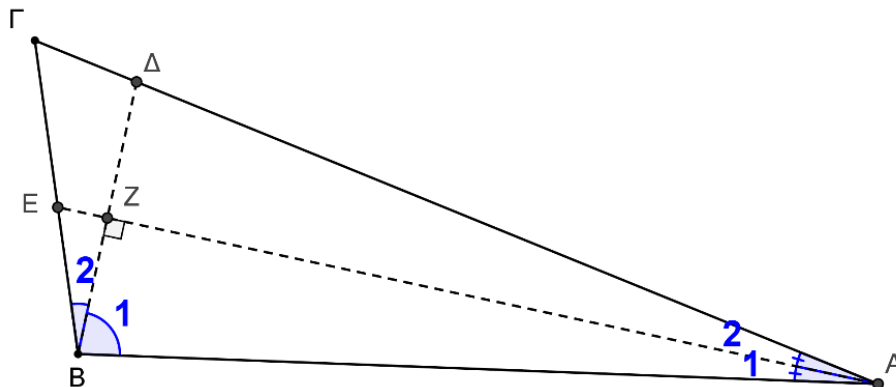


ΛΥΣΗ

α)



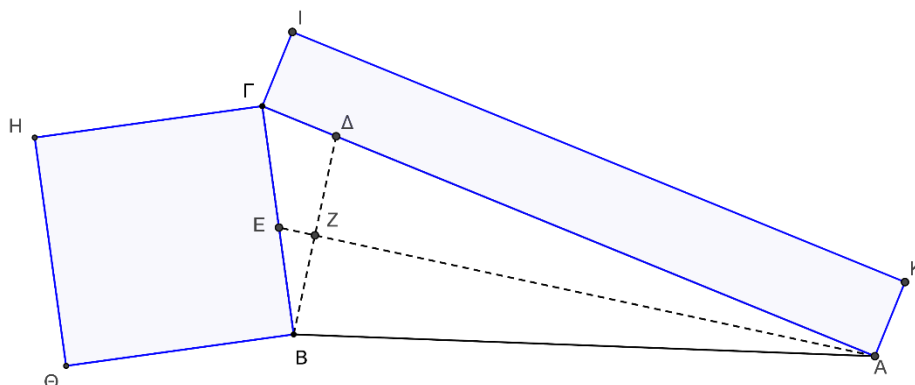
- i. Αφού η AE είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{A} , τότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$.

Επειδή το τρίγωνο BZA είναι ορθογώνιο, αφού η BD είναι κάθετη στην AE, οι γωνίες του \hat{A}_1 και \hat{B}_1 είναι συμπληρωματικές και θα ισχύει $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 90^\circ$ με $\hat{A}_1 = 10^\circ$. Επομένως $\hat{B}_1 = 90^\circ - 10^\circ$ ή $\hat{B}_1 = 80^\circ$.

Είναι $\Gamma\hat{B}A = \hat{B} = 100^\circ$, οπότε θα είναι $\hat{B}_2 = \Gamma\hat{B}A - \hat{B}_1$ με $\hat{B}_1 = 80^\circ$. Επομένως $\hat{B}_2 = 100^\circ - 80^\circ = 20^\circ$ ή $\Gamma\hat{B}\Delta = 20^\circ$. Συνεπώς $\Gamma\hat{B}\Delta = \hat{A} = 20^\circ$.

- ii. Τα τρίγωνα BΔΓ και ABΓ έχουν $\Gamma\hat{B}\Delta = \hat{A}$, από το i. ερώτημα και τη γωνία $\hat{\Gamma}$ κοινή, οπότε θα είναι όμοια γιατί έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία. Αφού τα τρίγωνα είναι όμοια θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή $\Gamma\hat{\Delta}B = \hat{A}\hat{B}\Gamma$. Συνεπώς, τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών είναι οι ΓΔ, ΒΓ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\Gamma\hat{B}\Delta$ και \hat{A} , οι ΒΔ, ΑΒ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τη γωνία $\hat{\Gamma}$ (κοινή) και οι ΒΓ, ΑΓ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\Gamma\hat{\Delta}B$ και $\hat{A}\hat{B}\Gamma$.

β)



Έστω ΒΓΗΘ είναι το τετράγωνο με πλευρά την ΒΓ και ΑΓΙΚ είναι το ορθογώνιο με διαστάσεις την ΑΓ και το τμήμα ΓΔ.

Το εμβαδόν του τετραγώνου ΒΓΗΘ είναι $(ΒΓΗΘ) = ΒΓ^2$ και το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΓΙΚ είναι $(ΑΓΙΚ) = ΑΓ \cdot ΓΔ$.

Τα εμβαδά των τετραπλεύρων θα είναι ίσα αν ισχύει η σχέση;

$$ΒΓ^2 = ΑΓ \cdot ΓΔ \text{ ή αν ισχύει } \frac{ΒΓ}{ΑΓ} = \frac{ΓΔ}{ΒΓ} \quad (1)$$

Από το ερώτημα α) ii. τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε οι λόγοι των ομόλογων πλευρών τους θα είναι ίσοι, δηλαδή θα ισχύει $\frac{ΓΔ}{ΒΓ} = \frac{ΒΔ}{ΑΒ} = \frac{ΒΓ}{ΑΓ}$. Επομένως, θα ισχύει ότι

$$\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = \frac{ΓΔ}{ΒΓ}, \text{ άρα και } ΒΓ^2 = ΑΓ \cdot ΓΔ.$$

Συνεπώς, ισχύει η σχέση (1), άρα τα τετράπλευρα ΒΓΗΘ και ΑΓΙΚ έχουν ίσα εμβαδά.