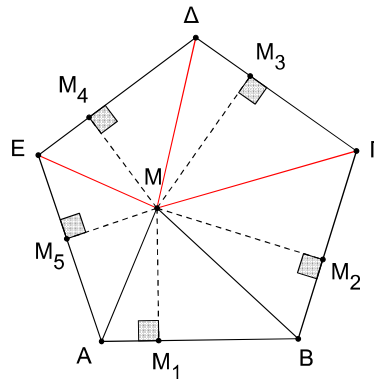


ΛΥΣΗ

α) i. Το εμβαδόν του τριγώνου ABM με βάση AB και αντίστοιχο ύψος το MM_1 είναι

$$(ABM) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MM_1 = \frac{1}{2} \cdot \lambda_5 \cdot MM_1.$$

ii. Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΓ, ΜΔ και ΜΕ.



Για το εμβαδόν του κανονικού πενταγώνου ΑΒΓΔΕ έχουμε:

$$\begin{aligned} (AB\Gamma\Delta E) &= (ABM) + (B\Gamma M) + (\Gamma\Delta M) + (\Delta E M) + (EAM) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lambda_5 \cdot MM_1 + \frac{1}{2} \cdot \lambda_5 \cdot MM_2 + \frac{1}{2} \cdot \lambda_5 \cdot MM_3 + \frac{1}{2} \cdot \lambda_5 \cdot MM_4 + \frac{1}{2} \cdot \lambda_5 \cdot MM_5 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lambda_5 \cdot (MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5) \quad (1). \end{aligned}$$

iii. Το εμβαδόν του κανονικού πενταγώνου ΑΒΓΔΕ είναι

$$(AB\Gamma\Delta E) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \lambda_5 \cdot \alpha_5 \quad (2).$$

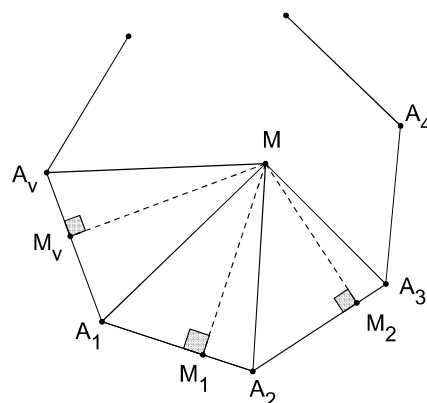
Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2} \cdot \lambda_5 \cdot (MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \lambda_5 \cdot \alpha_5$$

και με απλοποίηση του $\frac{1}{2} \cdot \lambda_5$ προκύπτει ότι

$$MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5 = 5\alpha_5.$$

β) Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα MA_1, MA_2, \dots, MA_v .



Για το εμβαδόν του κανονικού ν-γώνου $A_1A_2...A_n$ έχουμε:

$$\begin{aligned}(A_1A_2 \dots A_n) &= (A_1A_2M) + (A_2A_3M) + \dots + (A_nA_1M) \\&= \frac{1}{2} \cdot \lambda_n \cdot MM_1 + \frac{1}{2} \cdot \lambda_n \cdot MM_2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot \lambda_n \cdot MM_n \\&= \frac{1}{2} \cdot \lambda_n \cdot (MM_1 + MM_2 + \dots + MM_n) \quad (3).\end{aligned}$$

Όμως το εμβαδόν του κανονικού ν-γώνου $A_1A_2...A_n$ δίνεται από τον τύπο

$$(A_1A_2 \dots A_n) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \lambda_n \cdot \alpha_n \quad (4).$$

Από τις ισότητες (3) και (4) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2} \cdot \lambda_n \cdot (MM_1 + MM_2 + \dots + MM_n) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \lambda_n \cdot \alpha_n$$

και με απλοποίηση του $\frac{1}{2} \cdot \lambda_n$ προκύπτει ότι

$$MM_1 + MM_2 + \dots + MM_n = n\alpha_n.$$

Έτσι αποδείξαμε ότι ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.