

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και σημείο Μ στο εσωτερικό του. Έστω M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 οι προβολές του σημείου Μ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(ABM) = \frac{1}{2} \cdot \lambda_5 \cdot MM_1$, όπου λ_5 είναι η πλευρά του κανονικού πενταγώνου.

(Μονάδες 6)

ii. $(ABΓΔΕ) = \frac{1}{2} \cdot \lambda_5 \cdot (MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5)$.

(Μονάδες 7)

iii. $MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5 = 5\alpha_5$, όπου α_5 είναι το απόστημα του κανονικού πενταγώνου.

(Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής διατύπωσε τον ισχυρισμό: «Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός κανονικού ν-γώνου $A_1A_2\dots A_n$ και M_1, M_2, \dots, M_n είναι οι προβολές του σημείου Μ στις πλευρές $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ αντίστοιχα, τότε

$$MM_1 + MM_2 + \dots + MM_n = n\alpha_n,$$

όπου α_n είναι το απόστημα του κανονικού ν-γώνου». Να αποδείξετε ότι ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

(Μονάδες 5)

