

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο

$$(ΑΒΓΔ) = ΑΒ \cdot ΑΔ = 4α \cdot πα = 4πα^2.$$

Το εμβαδόν του ημικυκλίου ακτίνας $R = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{4α}{2} = 2α$ δίνεται από τον τύπο

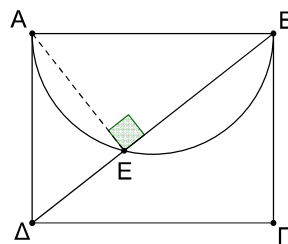
$$E_1 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi(2α)^2}{2} = \frac{4πα^2}{2} = 2πα^2 \quad (1).$$

Το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και εξωτερικά του ημικυκλίου γίνεται από τον τύπο

$$E_2 = (ΑΒΓΔ) - E_1 = 4πα^2 - 2πα^2 = 2πα^2 \quad (2).$$

Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι $E_1 = E_2$, επομένως το ημικύκλιο χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

β) Η διαγώνιος ΒΔ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Ε. Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ.



i. Η γωνία \widehat{AEB} είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, επομένως $\widehat{AEB} = 90^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η ΒΕ είναι η προβολή της κάθετης πλευράς ΑΒ πάνω στην υποτείνουσα ΒΔ, επομένως

$$ΑΒ^2 = ΒΔ \cdot ΒΕ \quad (1).$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η ΔΕ είναι η προβολή της κάθετης πλευράς ΑΔ πάνω στην υποτείνουσα ΒΔ, επομένως

$$ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΕ \quad (2).$$

ii. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ότι

$$ΒΔ^2 = ΑΒ^2 + ΑΔ^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $ΑΒ = 4α$, $ΑΔ = πα$, οπότε

$$ΒΔ^2 = (4α)^2 + (πα)^2 \quad \text{ή} \quad ΒΔ^2 = (16 + \pi^2)α^2 \quad \text{ή} \quad ΒΔ = α\sqrt{16 + \pi^2}.$$

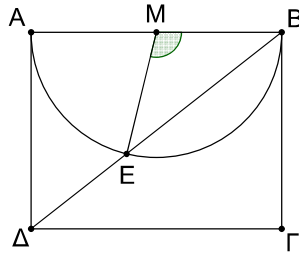
Είναι $ΑΒ = 4α$ και $ΒΔ = α\sqrt{16 + \pi^2}$, επομένως η (1) γίνεται

$$(4α)^2 = α\sqrt{16 + \pi^2} \cdot ΒΕ \quad \text{ή} \quad ΒΕ = \frac{16α}{\sqrt{16 + \pi^2}}.$$

Είναι $ΑΔ = πα$ και $ΒΔ = α\sqrt{16 + \pi^2}$, επομένως η (2) γίνεται

$$(\pi\alpha)^2 = \alpha\sqrt{16 + \pi^2} \cdot \Delta E \quad \text{ή} \quad \Delta E = \frac{\pi^2\alpha}{\sqrt{16 + \pi^2}}.$$

iii. Έστω M το μέσο της AB.



Τα ευθύγραμμα τμήματα ME και MB είναι ακτίνες του ημικυκλίου διαμέτρου AB, επομένως

$$ME = MB = \frac{AB}{2} = \frac{4\alpha}{2} = 2\alpha.$$

Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο BEM ισχύει

$$BE^2 = MB^2 + ME^2 - 2MB \cdot ME \cdot \sin \widehat{BME} \quad \text{ή} \quad \sin \widehat{BME} = \frac{MB^2 + ME^2 - BE^2}{2MB \cdot ME}.$$

Όμως $ME = MB = 2\alpha$ και $BE = \frac{16\alpha}{\sqrt{16 + \pi^2}}$, οπότε

$$\sin \widehat{BME} = \frac{(2\alpha)^2 + (2\alpha)^2 - \frac{256\alpha^2}{16 + \pi^2}}{2 \cdot 2\alpha \cdot 2\alpha} \quad \text{ή} \quad \sin \widehat{BME} = \frac{\left(8 - \frac{256}{16 + \pi^2}\right)\alpha^2}{8\alpha^2} \quad \text{ή} \quad \sin \widehat{BME} = \frac{\pi^2 - 16}{16 + \pi^2}.$$