

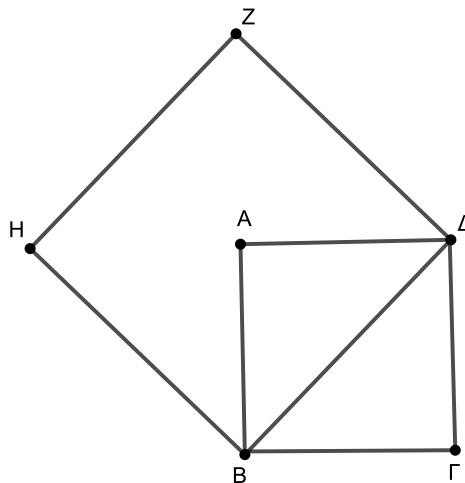
ΛΥΣΗ

α) Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε:

$B\Delta^2 = AB^2 + A\Delta^2$ ή $B\Delta^2 = \alpha^2 + \alpha^2$ ή $B\Delta^2 = 2\alpha^2$, οπότε $B\Delta = \alpha\sqrt{2}$. Για το εμβαδόν του $AB\Gamma\Delta$, έχουμε $(AB\Gamma\Delta) = \alpha^2$.

β)

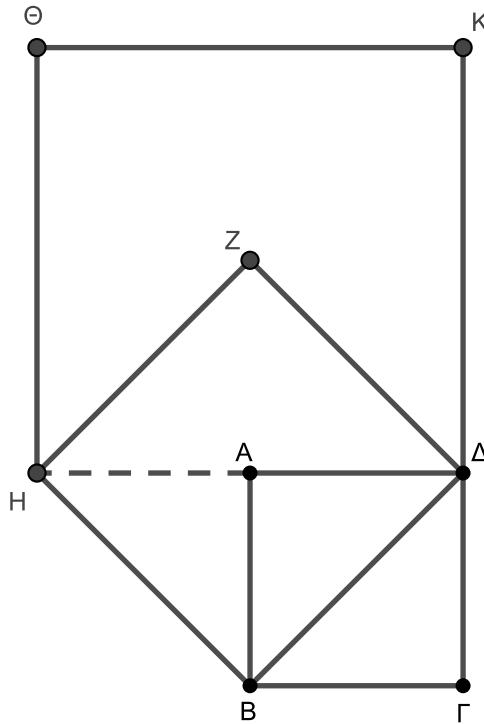
i.



Τα τμήματα ΔA και BA είναι κάθετα μεταξύ τους ως πλευρές του αρχικού τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$. Η γωνία $\widehat{B\Delta A}$ είναι 45° αφού η διαγώνιος $B\Delta$ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{\Delta}$ του τετραγώνου. Επειδή $\widehat{B\Delta Z} = 90^\circ$ ως γωνία του τετραγώνου $B\Delta ZH$, $\widehat{A\Delta Z} = 45^\circ$. Οπότε το τμήμα ΔA διχοτομεί τη γωνία $\widehat{\Delta}$ του τετραγώνου, άρα το ΔA ανήκει στη διαγώνιο του τετραγώνου $B\Delta ZH$. Ομοίως η BA διχοτομεί τη γωνία \widehat{B} του τετραγώνου $B\Delta ZH$ και το BA ανήκει στην άλλη διαγώνιό του. Οι δύο διαγώνιες του τετραγώνου $B\Delta ZH$ τέμνονται στο σημείο A , δηλαδή το A είναι το κέντρο του.

- ii. Η πλευρά του τετραγώνου $B\Delta ZH$ είναι ίση με $\alpha\sqrt{2}$, οπότε για το εμβαδόν του έχουμε: $(B\Delta ZH) = (\alpha\sqrt{2})^2$ ή $(B\Delta ZH) = 2\alpha^2$. Στο α) ερώτημα βρήκαμε ότι το εμβαδό του $AB\Gamma\Delta$ είναι α^2 , οπότε παρατηρούμε ότι $(B\Delta ZH) = 2(AB\Gamma\Delta)$.

γ)



Στο τετράγωνο ΒΔΖΗ η πλευρά του ισούται με $\alpha\sqrt{2}$. Επομένως η διαγώνιός του ΔΗ, σύμφωνα με το α) ερώτημα, θα είναι ίση με $\alpha\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2\alpha$. Επομένως η πλευρά του τετραγώνου ΔΗΘΚ είναι 2α , οπότε $(\Delta\text{Η}\Theta\text{Κ}) = 4\alpha^2$. Συγκρίνοντας το εμβαδό του τετραγώνου ΔΗΘΚ με το εμβαδό του ΒΔΖΗ παρατηρούμε ότι $(\Delta\text{Η}\Theta\text{Κ}) = 2(\text{Β}\Delta\text{ΖΗ})$, όπως και $(\text{Β}\Delta\text{ΖΗ}) = 2(\text{ΑΒΓΔ})$. Επομένως $(\Delta\text{Η}\Theta\text{Κ}) = 2(\text{Β}\Delta\text{ΖΗ}) = 4(\text{ΑΒΓΔ})$. Δηλαδή, σχεδιάζοντας τετράγωνο με πλευρά τη διαγώνιο ενός τετραγώνου, το νέο τετράγωνο έχει διπλάσιο εμβαδό από το προηγούμενό του. Το αρχικό τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά ίση με α , έχει εμβαδό α^2 , το ΒΔΖΗ έχει εμβαδό $2\alpha^2$, το ΔΗΘΚ έχει εμβαδό $4\alpha^2$. Σχεδιάζοντας τετράγωνο με πλευρά τη διαγώνιο του ΔΗΘΚ θα προκύψει τετράγωνο με εμβαδό $8\alpha^2$.

Επομένως για να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του θα είναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ, θα πρέπει να κάνουμε τη διαδικασία αυτή συνολικά τέσσερις (4) φορές. Δηλαδή, μετά το τετράγωνο ΔΗΘΚ του σχήματος θα χρειαστεί να φτιάξουμε, όπως περιγράφηκε, δύο ακόμη τετράγωνα.