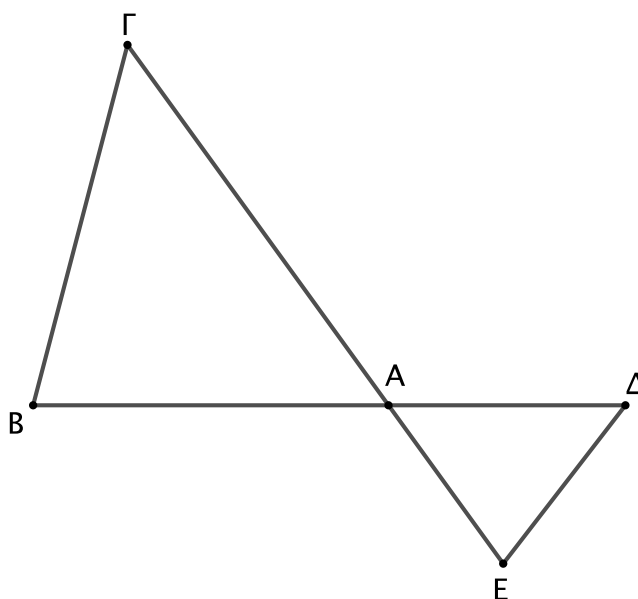


ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα AΔΕ και ABΓ έχουν $\widehat{ΔΑΕ} = \widehat{ΒΑΓ}$ (ως κατακορυφήν), οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές, δηλαδή:

$$\frac{(AΔΕ)}{(ABΓ)} = \frac{AΔ \cdot AΕ}{AB \cdot AΓ} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot \frac{2}{5} AΓ}{AB \cdot AΓ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

β) Εργαζόμενοι όπως στο προηγούμενο ερώτημα, έχουμε σε αυτή την περίπτωση:

$$\frac{(AΔΕ)}{(ABΓ)} = \frac{AΔ \cdot AΕ}{AB \cdot AΓ} = \frac{\frac{1}{\lambda} AB \cdot \frac{\lambda}{\mu} AΓ}{AB \cdot AΓ} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{\mu}$$

Επομένως, ο ζητούμενος λόγος είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ.

γ) Αφού είναι $(AΔΕ) = (ABΓ)$, τότε από την ισότητα

$$\frac{(AΔΕ)}{(ABΓ)} = \frac{1}{\mu}$$

προκύπτει ότι

$$1 = \frac{1}{\mu} \quad \text{ή} \quad \mu = 1$$

Άρα, τα τρίγωνα ABΓ και AΔΕ είναι ισεμβαδικά για $\mu = 1$ και για οποιαδήποτε τιμή του λ, αφού, όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα (β), ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ. Επομένως, υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ, για τα οποία είναι $(AΔΕ) = (ABΓ)$. Τα ζεύγη αυτά είναι της μορφής

$$\{(\lambda, 1), \lambda \in \mathbb{N}^*\}$$

Άρα, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.