

ΛΥΣΗ

α) Φέρουμε την ΒΚ. Επειδή $\Gamma\Delta = 2AB$ και Κ μέσο της $\Gamma\Delta$, θα έχουμε $AB \parallel \Delta K$, οπότε το $ABK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και $BK \parallel \Delta\Delta$.

- i. Φέρουμε την ΒΕ κάθετη στην $\Gamma\Delta$. Τότε το ΒΕ είναι ύψος από την κορυφή Β του τριγώνου ΒΚΓ αλλά και του παραλληλογράμμου $ABK\Delta$. $(ABK\Delta) = \Delta K \cdot BE$ και $(BK\Gamma) = \frac{K\Gamma \cdot BE}{2}$.

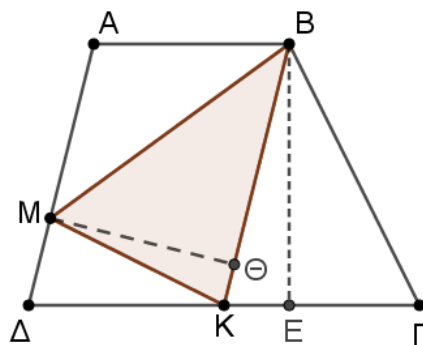
Όμως επειδή το Κ είναι μέσο της $\Delta\Gamma$, έχουμε $\Delta K = K\Gamma$.

$$\text{Έτσι έχουμε } (BK\Gamma) = \frac{\Delta K \cdot BE}{2} = \frac{(ABK\Delta)}{2}.$$

- ii. Φέρουμε το ύψος ΜΘ του τριγώνου ΒΜΚ.

$$\text{Τότε θα έχουμε } (BMK) = \frac{BK \cdot M\Theta}{2} = \frac{(ABK\Delta)}{2}. \text{ Από το i ερώτημα έχουμε ότι}$$

$$(BK\Gamma) = \frac{(ABK\Delta)}{2}. \text{ Επομένως } (BK\Gamma) = (BMK).$$



β)

Από το α.ii) έχουμε ότι $2(BMK) = (ABK\Delta)$ και $(BMK) = (BK\Gamma)$.

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $3(BMK) = (ABK\Delta) + (BK\Gamma) = (AB\Gamma\Delta)$,

$$\text{δηλαδή } \frac{(AB\Gamma\Delta)}{(BMK)} = 3.$$

Άρα, η προς διερεύνηση πρόταση είναι σωστή. Ο λόγος των εμβαδών είναι σταθερός και ίσος με 3.