

ΛΥΣΗ

Από τα δεδομένα έχουμε:  $(ΑΓΘΙ) = E$ ,  $(ΑΒΗΖ) = E_1$ ,  $(ΒΓΡΔ) = E_2$  και ισχύουν:

$$E_1 = 4E \text{ (1)}, E_2 = 5E \text{ (2)}.$$

α) Θέτουμε  $ΒΓ = \alpha$ ,  $ΑΓ = \beta$ ,  $ΑΒ = \gamma$ , τις πλευρές του τριγώνου  $ΑΒΓ$ , τότε:

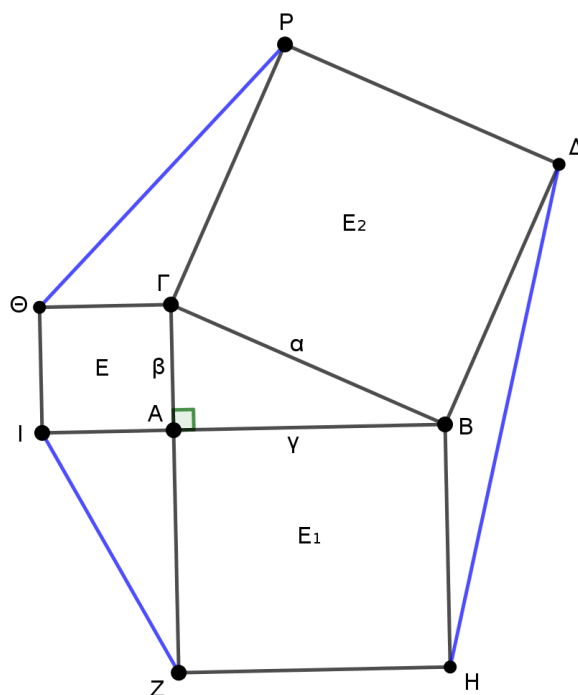
$$E = \beta^2 \text{ (3)}, E_1 = \gamma^2 \text{ (4)} \text{ και } E_2 = \alpha^2 \text{ (5)}.$$

Οι (1), (2) λόγω των (3), (4), (5) γράφονται:

- $\gamma^2 = 4\beta^2$  ή  $\beta^2 + \gamma^2 = \beta^2 + 4\beta^2$  ή  $\beta^2 + \gamma^2 = 5\beta^2$
- $\alpha^2 = 5\beta^2$

Οι τελευταίες δύο ισότητες έχουν τα δεύτερα μέλη τους ίσα, οπότε θα είναι και  $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$ , που σημαίνει ότι το τρίγωνο  $ΑΒΓ$  είναι ορθογώνιο, με υποτείνουσα την πλευρά  $\alpha$ , άρα ορθή γωνία την  $A$ .

β)



Το τρίγωνο  $ΑΒΓ$  είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές  $\beta$  και  $\gamma$ , άρα  $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma$ .

Το τρίγωνο  $ΑΙΖ$ , είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές  $\beta$ ,  $\gamma$ , άρα  $(ΑΙΖ) = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma$ .

Άρα  $(ΑΒΓ) = (ΑΙΖ)$ .

Λόγω των τετραγώνων, για τις γωνίες με κορυφή το  $B$  έχουμε:

$$\widehat{HBD} + \widehat{DBG} + \widehat{ABG} + \widehat{ABH} = 360^\circ \text{ ή } \widehat{HBD} + 90^\circ + \widehat{ABG} + 90^\circ = 360^\circ \text{ ή } \widehat{HBD} + \widehat{ABG} = 180^\circ.$$

Δηλαδή οι γωνίες  $\text{HB}\Delta$  και  $\text{AB}\Gamma$  είναι παραπληρωματικές. Άρα ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων  $\text{BH}\Delta$ ,  $\text{AB}\Gamma$  θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις παραπληρωματικές γωνίες. Δηλαδή  $\frac{(\text{BH}\Delta)}{(\text{AB}\Gamma)} = \frac{\text{BH} \cdot \text{B}\Delta}{\text{B}\Gamma \cdot \text{BA}} = \frac{\gamma \cdot \alpha}{\alpha \cdot \gamma} = 1$ , οπότε

$$\frac{(\text{BH}\Delta)}{(\text{AB}\Gamma)} = 1, \text{ άρα } (\text{BH}\Delta) = (\text{AB}\Gamma).$$

Όμοια, για τις γωνίες με κορυφή το  $\Gamma$  έχουμε:

$$\Theta\hat{\Gamma}\text{P} + \Theta\hat{\Gamma}\text{A} + \text{A}\hat{\Gamma}\text{B} + \text{B}\hat{\Gamma}\text{P} = 360^\circ \text{ ή } \Theta\hat{\Gamma}\text{P} + 90^\circ + \text{A}\hat{\Gamma}\text{B} + 90^\circ = 360^\circ \text{ ή } \Theta\hat{\Gamma}\text{P} + \text{A}\hat{\Gamma}\text{B} = 180^\circ.$$

Δηλαδή οι γωνίες  $\Theta\Gamma\text{P}$  και  $\text{A}\Gamma\text{B}$  είναι παραπληρωματικές. Άρα ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων  $\Gamma\text{P}\Theta$ ,  $\text{AB}\Gamma$  θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις παραπληρωματικές γωνίες. Δηλαδή  $\frac{(\Gamma\text{P}\Theta)}{(\text{AB}\Gamma)} = \frac{\Gamma\text{P} \cdot \Gamma\Theta}{\Gamma\text{A} \cdot \Gamma\text{B}} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\beta \cdot \alpha} = 1$ , οπότε

$$\frac{(\Gamma\text{P}\Theta)}{(\text{AB}\Gamma)} = 1, \text{ άρα } (\Gamma\text{P}\Theta) = (\text{AB}\Gamma).$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:  $(\text{AB}\Gamma) = (\text{A}\Gamma\text{Z}) = (\text{BH}\Delta) = (\Gamma\text{P}\Theta)$ .

γ) Είναι  $\text{A}\Gamma = 1$  ή  $\beta = 1$ , οπότε από τις ισότητες του ερωτήματος ( $\alpha$ ):

$$\alpha^2 = 5 \beta^2 \text{ και } \gamma^2 = 4 \beta^2, \text{ παίρνουμε: } \alpha^2 = 5 \text{ και } \gamma^2 = 4, \text{ άρα } \alpha = \sqrt{5} \text{ και } \gamma = 2.$$

$$\text{Έτσι λόγω του ερωτήματος } (\beta), \text{ είναι: } (\text{A}\Gamma\text{Z}) = (\text{BH}\Delta) = (\Gamma\text{P}\Theta) = (\text{AB}\Gamma) = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

Επίσης  $\text{E} = \beta^2$ ,  $\text{E}_1 = \gamma^2$  και  $\text{E}_2 = \alpha^2$  ή  $\text{E} = 1$ ,  $\text{E}_1 = 4$  και  $\text{E}_2 = 5$ . Οπότε:

$$(\text{ZH}\Delta\text{P}\Theta\text{I}) = \text{E} + \text{E}_1 + \text{E}_2 + (\text{A}\Gamma\text{Z}) + (\text{BH}\Delta) + (\Gamma\text{P}\Theta) + (\text{AB}\Gamma) = 1 + 4 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1 = 14.$$