

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε ότι

$$BE^2 = AB^2 + AE^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι  $AB = 3$ ,  $AE = 4 - \sqrt{3}$ , οπότε

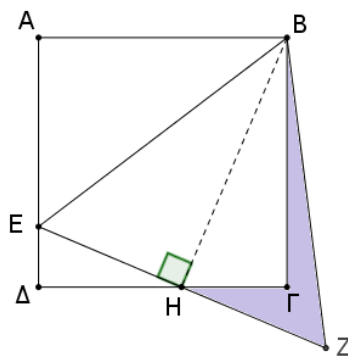
$$BE^2 = 3^2 + (4 - \sqrt{3})^2 \text{ ή } BE^2 = 28 - 8\sqrt{3} = 4(7 - 2\sqrt{3}) \text{ ή } BE = 2\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}.$$

β) Είναι  $DE = AD - AE = 3 - (4 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$ . Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΗ έχουμε ότι  $EH^2 = DE^2 + DH^2$ . Όμως  $DH = \sqrt{3}$  από τα δεδομένα και  $DE = \sqrt{3} - 1$ , οπότε

$$EH^2 = (\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3})^2 \text{ ή } EH^2 = 7 - 2\sqrt{3} \text{ ή } EH = \sqrt{7 - 2\sqrt{3}} \quad (1).$$

Από την ισότητα (1) και το ερώτημα α) προκύπτει ότι  $BE = 2EH$ . Από τα δεδομένα το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ισόπλευρο οπότε  $EZ = BE$ . Επομένως  $EZ = 2EH$ , δηλαδή το Η είναι το μέσο της ΕΖ.

γ)



Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου ισούται με τη διαφορά του εμβαδού του τριγώνου ΒΓΗ από το τρίγωνο ΒΖΗ, δηλαδή  $(BZH) - (BΓH)$ .

Το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α ισούται με  $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ . Η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου ΒΕΖ ισούται με  $2\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$ , επομένως

$$(BEZ) = \frac{4(7-2\sqrt{3})\sqrt{3}}{4} \text{ ή } (BEZ) = 7\sqrt{3} - 6.$$

Το σημείο Η είναι το μέσο της πλευράς του ισόπλευρου τριγώνου ΒΕΖ, οπότε

$$(BZH) = \frac{(BEZ)}{2} = \frac{7\sqrt{3}-6}{2} \quad (2).$$

Το εμβαδόν του ορθογώνιου τριγώνου ΒΓΗ είναι  $(BΓH) = \frac{BΓ \cdot ΓΗ}{2}$  με  $BΓ = 3$  και  $ΓΗ = ΓΔ - ΔΗ = 3 - \sqrt{3}$ , οπότε

$$(B\Gamma H) = \frac{3(3-\sqrt{3})}{2} = \frac{9-3\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

Από τις ισότητες (2) και (3) προκύπτει ότι

$$(BZH) - (B\Gamma H) = \frac{7\sqrt{3}-6}{2} - \frac{9-3\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}-15}{2}.$$