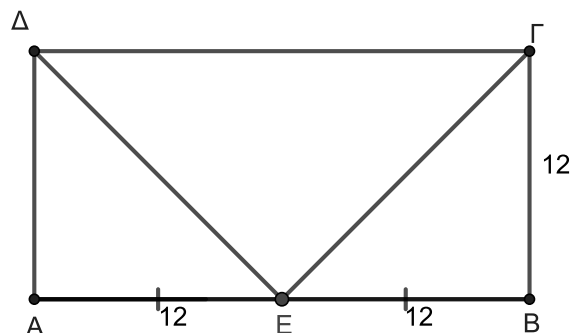


ΛΥΣΗ

α)

i.

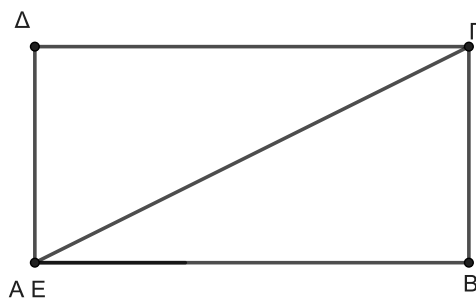


Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΕ είναι ορθογώνια με καθεμιά από τις κάθετες πλευρές τους 12. Οπότε είναι ίσα και ισχύει $ΓΕ = ΔΕ$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει $ΓΕ^2 = ΔΕ^2 = 12^2 + 12^2 = 2 \cdot 12^2$. Οπότε $ΓΕ = ΔΕ = 12\sqrt{2}$.

Η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ είναι ίση με $24 + 12\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 24 + 24\sqrt{2}$.

Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $\frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$, όπου η βάση έχει μήκος $ΔΓ = ΑΒ = 24$ και το ύψος είναι το κάθετο τμήμα από την κορυφή Ε προς την πλευρά ΔΓ που έχει μήκος όσο η απόσταση των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ, δηλαδή ίσο με 12. Άρα $(ΓΕΔ) = \frac{24 \cdot 12}{2} = 12 \cdot 12 = 144$.

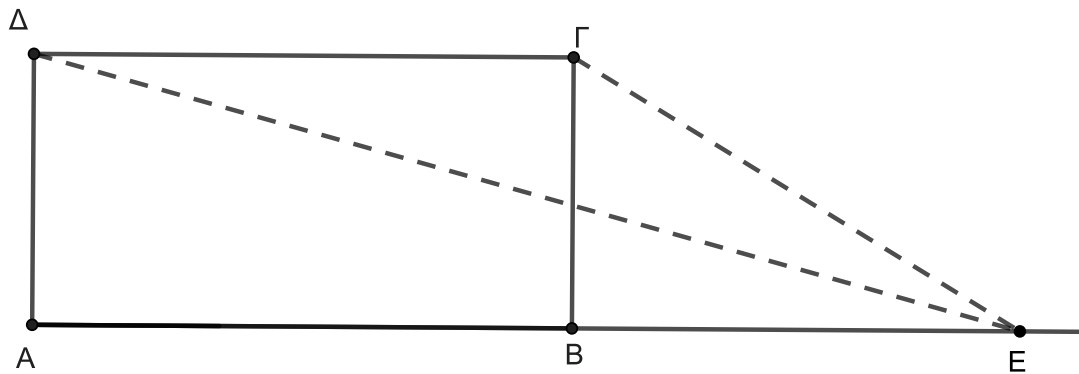
ii.



Αν το σημείο Ε ταυτιστεί με την κορυφή Α του ορθογωνίου τότε το τρίγωνο ΓΕΔ ταυτίζεται με το τρίγωνο ΓΑΔ. Οπότε η περίμετρος του τριγώνου είναι ίση με $ΓΑ + ΑΔ + ΔΓ$ (1). Για την πλευρά ΓΑ που είναι υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε $ΓΑ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ ή $ΓΑ^2 = 24^2 + 12^2 = 2^2 \cdot 12^2 + 12^2 = 5 \cdot 12^2$ ή $ΓΑ = 12\sqrt{5}$. Οπότε η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ από τη σχέση (1) ισούται με $12\sqrt{5} + 12 + 24 = 36 + 12\sqrt{5}$.

Το εμβαδό του τριγώνου όταν το σημείο Ε ταυτιστεί με την κορυφή Α ισούται με το εμβαδό του τριγώνου ΓΑΔ που είναι ίσο με $\frac{ΔΓ \cdot ΑΔ}{2} = \frac{24 \cdot 12}{2} = 12 \cdot 12 = 144$.

β)



- i. Αν το σημείο E κινηθεί πάνω στη ευθεία AB που είναι παράλληλη στην πλευρά ΔΓ τότε η πλευρά ΔΓ παραμένει σταθερή αλλά οι δυο άλλες πλευρές του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλονται. Αν το σημείο E κινείται στην προέκταση της AB προς το B, απομακρυνόμενο από το σημείο B, τα πλάγια τμήματα ΓΕ και ΔΕ συνεχώς μεγαλώνουν, αφού το ίχνος τους E απέχει ολοένα και περισσότερο από τα ίχνη B και A των κάθετων τμημάτων ΓΒ και ΔΑ αντίστοιχα. Οπότε η περίμετρος η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλεται και συνεχώς αυξάνεται.
- ii. Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ, θα πάρουμε ως βάση τη σταθερή πλευρά του ΔΓ, οπότε το ύψος του προς τη ΔΓ ισούται με την απόσταση των παραλλήλων AB και ΔΓ που είναι σταθερή και ίση με 12. Το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ σε οποιαδήποτε θέση της κορυφής E πάνω στην ευθεία AB είναι ίσο με : $\frac{24 \cdot 12}{2} = 12 \cdot 12 = 144$.

Παρατηρούμε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι: $(ΑΒΓΔ) = 24 \cdot 12 = 288$.

$$\text{Άρα } (ΓΕΔ) = 144 = \frac{288}{2} = \frac{(ΑΒΓΔ)}{2}.$$

Συμπερασματικά αν το σημείο E κινείται στην προέκταση του τμήματος AB προς το B απομακρυνόμενο από το σημείο B, οι πλευρές ΓΕ και ΔΕ του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλονται, η περίμετρος μεταβάλλεται (αυξάνεται) όπως έχει προκύψει στο βι) αλλά το εμβαδό του τριγώνου μένει σταθερό και ίσο με το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου.