

ΛΥΣΗ

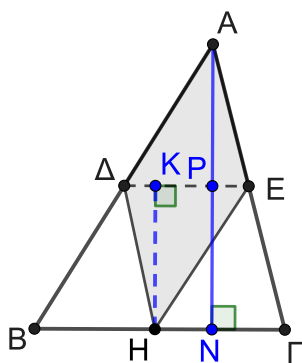
α) i. Εφόσον $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AG}$, τα τρίγωνα $\triangle ADE$ και $\triangle ABG$ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες μία προς μία και την περιεχόμενη στις πλευρές αυτές γωνία ίση (είναι η κοινή γωνία \hat{A}). Ο λόγος ομοιότητάς τους είναι ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους, δηλαδή $\frac{1}{2}$.

Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους θα είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, δηλαδή $\frac{(ADE)}{(ABG)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Άρα το εμβαδόν του $\triangle ADE$ είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του $\triangle ABG$.

ii. α' τρόπος: Επειδή καθένας από τους λόγους $\frac{AD}{AB}$ και $\frac{AE}{AG}$ είναι ίσος με $\frac{1}{2}$, τα D και E είναι μέσα των πλευρών AB και AG , αντίστοιχα, του τριγώνου $\triangle ABG$. Άρα η DE είναι παράλληλη με τη BG .

Σχεδιάζουμε τα ύψη:

- AN του $\triangle ABG$ από την κορυφή A και
- HK του $\triangle HED$ από την κορυφή H .



Ονομάζουμε P το σημείο που το AN τέμνει το DE . Τότε το AP είναι κάθετο στη DE , αφού το AN είναι κάθετο στη BG η οποία είναι παράλληλη στο DE . Άρα το AP είναι ύψος του τριγώνου $\triangle ADE$ από την κορυφή A .

Λόγω ομοιότητας των τριγώνων $\triangle ADE$ και $\triangle ABG$ τα ύψη που αντιστοιχούν σε ομόλογες πλευρές είναι ανάλογα με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$, δηλαδή τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων.

Άρα $\frac{AP}{AN} = \frac{1}{2}$ ή $AP = \frac{AN}{2}$. Επομένως $PN = \frac{AN}{2} = AP$.

Όμως $HK = PN$, ως ευθύγραμμα τμήματα που είναι κάθετα στις παράλληλες ευθείες DE και BG , στις οποίες βρίσκονται τα άκρα τους. Άρα $HK = AP$.

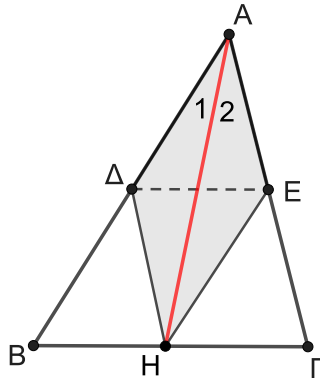
Επομένως τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΗΕΔ έχουν κοινή βάση τη ΔΕ και ίσα ύψη, τα ΑΡ και ΗΚ, άρα έχουν ίσα εμβαδά. Δηλαδή $(ΑΔΕ) = (ΗΕΔ)$.

Το εμβαδόν του ΑΔΗΕ είναι ίσο με $(ΑΔΗΕ) = (ΑΔΕ) + (ΗΕΔ) = 2(ΑΔΕ)$.

Όμως από το ερώτημα α) i $(ΑΔΕ) = \frac{(ΑΒΓ)}{4}$. Άρα $(ΑΔΗΕ) = 2 \cdot \frac{(ΑΒΓ)}{4} = \frac{(ΑΒΓ)}{2}$.

Δηλαδή το εμβαδόν του ΑΔΗΕ είναι το μισό του εμβαδού του ΑΒΓ.

β' τρόπος: Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΗ.



Τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΑΗΒ έχουν κοινή γωνία την \hat{A}_1 , επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία \hat{A}_1 .

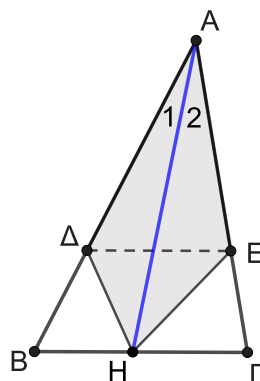
Δηλαδή $\frac{(ΑΗΔ)}{(ΑΗΒ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΗ}{ΑΒ \cdot ΑΗ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{1}{2}$ ή $(ΑΗΔ) = \frac{1}{2} \cdot (ΑΗΒ)$.

Με όμοιο συλλογισμό και κοινή γωνία την \hat{A}_2 , για τα τρίγωνα ΑΗΕ και ΑΗΓ έχουμε ότι

$(ΑΗΕ) = \frac{1}{2} \cdot (ΑΗΓ)$.

Επομένως $(ΑΔΗΕ) = (ΑΗΔ) + (ΑΗΕ) = \frac{1}{2} \cdot (ΑΗΒ) + \frac{1}{2} \cdot (ΑΗΓ) = \frac{1}{2} \cdot [(ΑΗΒ) + (ΑΗΓ)] = \frac{1}{2} \cdot (ΑΒΓ)$.

β) Αν είναι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \lambda$, τότε $0 < \lambda < 1$, γιατί το $ΑΔ < ΑΒ$.



Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΗ.

Τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΑΗΒ έχουν κοινή γωνία την \hat{A}_1 , επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία \hat{A}_1 .

$$\text{Δηλαδή } \frac{(ΑΗΔ)}{(ΑΗΒ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΗ}{ΑΒ \cdot ΑΗ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \lambda \text{ ή } (ΑΗΔ) = \lambda \cdot (ΑΗΒ).$$

Με όμοιο συλλογισμό, για τα τρίγωνα ΑΗΕ και ΑΗΓ έχουμε ότι:

$$\frac{(ΑΗΕ)}{(ΑΗΓ)} = \frac{ΑΕ \cdot ΑΗ}{ΑΓ \cdot ΑΗ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \lambda \text{ ή } (ΑΗΕ) = \lambda \cdot (ΑΗΓ)$$

$$\text{Επομένως } (ΑΔΗΕ) = (ΑΗΔ) + (ΑΗΕ) = \lambda \cdot (ΑΗΒ) + \lambda \cdot (ΑΗΓ) = \lambda \cdot [(ΑΗΒ) + (ΑΗΓ)] = \lambda \cdot (ΑΒΓ) .$$